الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2007

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

(I) ليكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 نضع : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

① ⓐ تحقق أن لكل زوج (a,b) من $\mathbb{E}^2$: $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$ — 0,25 ن

ⓑ استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E . — 0,25 ن

② بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية . — 0,50 ن

(II) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها : $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $a\epsilon E$; $\mathrm{M}(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$

① ⓐ نضع : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A^2 = -2A$ و أن : $M(a) = 1 + \frac{a}{\sqrt{2}}A$. — 0,50 ن

ⓑ بين أن F جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ — 0,50 ن

② نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned} \varphi :\ (\mathrm{E},\perp) &\longrightarrow (\mathrm{F},\times) \\ a &\longrightarrow \varphi(a) = \mathrm{M}(a) \end{aligned}$$

ⓐ بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي . — 0,50 ن

ⓑ استنتج بنية $(F,\times)$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين i و $-i$

(I) ① ⓐ تحقق أن العدد العقدي $u = a + i$ حل للمعادلة $(E) :\ z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$. — 0,25 ن

ⓑ حدد v الحل الثاني للمعادلة (E) . — 0,25 ن

② نفترض أن $|a| = 1$.

ⓐ بين أن : $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$ — 0,25 ن

ⓑ تحقق أن : $u^2 = a[(a-\bar{a}) + 2i]$ — 0,25 ن

ⓙ استنتج أن : $arg(u) = \frac{1}{2}arg(a) + \frac{\pi}{4}\,[\pi]$ — 0,50 ن

③ بين أن $|u| + |v| \geq 2$ — 0,50 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 . و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث :

$|u| + |v| = m$

0,50 ن — ① بين أن (E_m) إهليلج مركزه أصل المعلم O .

② نضع : $a = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .

0,25 ن — ⓐ بين أن : $x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) .

0,25 ن — ⓑ أنشىء الإهليلج (E_4) .

0,50 ن — ③ نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رَأسَيْ الإهليلج (E_4) . بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر المعادلة : $(E) \;:\; 195x - 232y = 1$.

0,50 ن — ① ⓐ حدد $195 \wedge 132$.

0,50 ن — ⓑ بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(163 + 232k \,;\, 137 + 195k) \;;\; k \epsilon \mathbb{Z}\}$

0,25 ن — ⓒ أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1[232]$.

0,25 ن — ② بين أن العدد 233 عدد أولي.

③ لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{195} على 233.

نقبل أن : $a^{232} \equiv 1[233]$: $\forall a \epsilon A \setminus \{0\}$.

0,50 ن — ⓐ بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن : $a = b$.

0,50 ن — ⓑ ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a) = b$. حدد a بدلالة b .

0,50 ن — ⓒ استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

التمرين الرابع : (10,5 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$.

0,50 ن — **(I)** ① بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$.

0,25 ن — ② بين أن $x = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $g(x) = 0$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} \;;\; \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,50 ن — ① أحسب النهايتين : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + x)$

0,25 ن — ② بين أن الدالة f متصلة في 0.

0,50 ن — ③ ⓐ أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن — ⓑ إستنتج تغيرات الدالة f .

④ نعتبر التكامل : $J(x) = \int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي .

0,50 ن — ⓐ باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$.

1,00 ن — ⓑ بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$

0,50 ن ⓙ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$

0,75 ن ⓓ استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

0,50 ن ⑤ ⓐ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)}(e^x(x-1)+2+x)$

0,50 ن ⓑ أدرس إشارة $e^x(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

0,25 ن ⓙ استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$.

0,50 ن ⓓ أنشىء $(\mathscr{C})$

(III) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \ ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

0,25 ن ① بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

0,50 ن ② ⓐ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

0,50 ن ⓑ بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

0,50 ن ⓙ استنتج أن المتتالية : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

(IV) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1}dt \ ; \quad \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

0,50 ن ① ⓐ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

0,25 ن ⓑ بين أن الدالة F متصلة في 0.

0,50 ن ⓙ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$.

0,50 ن ② ⓐ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$

0,25 ن ⓑ أدرس تغيرات الدالة F .