Telemidi.com مبادرة لله ثم للوطن

التمرين الأول : (2,0 ن)

■ ①

توزيع أربع كرات مرقمة على 6 أشخاص يمكن أن يتم بخمس طرق مختلفة :

الطريقة الأولى : إعطاء شخص واحد الكرات الأربع.

الطريقة الثانية : إعطاء شخص واحد الكرة الأولى ثم نعطي الشخص الثاني الكرات الثلاث المتبقية.

الطريقة الثالثة : إعطاء شخص واحد كرتين و شخص ثاني كرتين.

الطريقة الرابعة : إعطاء شخص واحد كرة واحدة و شخص ثاني كرة واحدة و شخص ثالث كرتين.

الطريقة الخامسة : نعطي كل شخص كرة واحدة .

في الطريقة الأولى لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الأربع .

في الطريقة الثانية لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه كرة واحدة
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيها إياه
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الثلاث المتبقية.

في الطريقة الثالثة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرتين
- و C_4^2 إمكانية لاختيار الكرتين.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص الآخر صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الرابعة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الرابعة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- C_4^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثالثة.
- و C_2^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- C_3^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الرابعة.
- و C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

التطبيق العددي :

الطريقة :	ط 1	ط 2	ط 3	ط 4	ط 5
عدد الإمكانيات	6	120	180	1440	8640

و بالتالي : عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو :

$$6 + 120 + 180 + 1440 + 8640 = \boxed{10386}$$

■ ②

الشخص A يمكنه أن يحصل على :

- كرة واحدة بـ C_4^1 إمكانية.
- أو يحصل على كرتين بـ C_4^2 إمكانية.
- أو يحصل على ثلاث كرات بـ C_4^3 إمكانية.
- أو يحصل على أربع كرات بإمكانية واحدة .

إذن عدد الإمكانيات التي يحصل فيها الشخص A على كرة واحدة على الأقل هو :

$$\boxed{C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15}$$

و منه : احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل يساوي :

$$\frac{15}{10386} \approx 0{,}0015 \equiv 0{,}15\%$$

■ ③

إذا حصل الشخص C على كرة واحدة رقمها m و حصل الشخص B على كرة واحدة رقمها n فإن الشخص A سيحصل على $(m+n)$ كرة و لدينا :

$$m + n + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad m + n = 2$$

نعلم أن $m \neq n$ إذن هذه المعادلة لا تقبل حلولا في المجموعة $\{1\,,2\,,3\,,4\} \times \{1\,,2\,,3\,,4\}$

و بالتالي نحن بصدد حدث مستحيل و احتمال وقوعه 0

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■ (I)

نضع : $z = x + iy$ ثم ننطلق من الكتابة : $f(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x - \sqrt{3}y) + i(-y + \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -y + \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = \sqrt{3}y \\ 3x = \sqrt{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x + i\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x(1 + i\sqrt{3})$$

و منه : مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ في $\mathbb{C}$ تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{ \; x(1 + i\sqrt{3}) \;\; / \;\; x\epsilon\mathbb{R} \}$$

■ (II) ① (أ)

لدينا : $f(z) = \frac{1}{6}\left((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad f(z_n) = \frac{1}{6}\left((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\overline{z_n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| = \left|\frac{1}{6}\left((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\overline{z_n}\right)\right|$$

نعلم أن : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ و $|z| = |\bar{z}|$.

إذن : $\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \frac{1}{6}\left|(1 + i\sqrt{3})z_n\right| + \frac{1}{6}|2\overline{z_n}|$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \left(\frac{1}{6}\right)2|z_n| + \left(\frac{2}{6}\right)|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$$

و نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما موجبا.

إذن : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n}$

■ (II) ① (ب)

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

من أجل $(n-1)$ نحصل على : $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u_{n-2}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 u_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_{n-n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0$$ و بالتالي :

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

لدينا : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

لأن $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1

و بالتالي : $(u_n)_n$ متقاربة و تؤول إلى الصفر

يعني : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(u_n) = 0}$

■ (II) ② (أ)

لدينا : $\mathcal{S}_n = \mathcal{O}M_0 + \mathcal{O}M_1 + \cdots + \mathcal{O}M_n$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

و نعلم أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{R}) \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$

إذن :

$$\begin{cases} u_0 \leq 1 \\ u_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right) \\ \vdots \\ u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$

Talamidi.com

و منه : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$\Leftrightarrow \quad S_n \leq \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{S_n \leq 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}$

و لدينا : $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \geq 0$ إذن : $-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 0$

و منه : $\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leq 1$

يعني : $3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leq 3$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ : \ S_n \leq 3}$

■ (II) ② (ب)

لدينا : $S_n = \mathcal{O}M_0 + \mathcal{O}M_1 + \cdots + \mathcal{O}M_n$

نلاحظ أن :

$(\mathcal{O}M_0 + \cdots + \mathcal{O}M_n) + \mathcal{O}M_{n+1} > (\mathcal{O}M_0 + \cdots + \mathcal{O}M_n)$

إذن : $S_{n+1} > S_n$

إذن $(S_n)_n$ متتالية تزايدية

و بما أنها مكبورة بالعدد 3 (يعني : $S_n \leq 3$) فإنها متقاربة.

■ (III) ①

لدينا : $f(z) = \frac{1}{6}\left((1+i\sqrt{3})z + 2\bar{z}\right)$

$\Leftrightarrow \quad f(z) = \frac{1}{6}\left(r(1+i\sqrt{3})e^{i\theta} + 2re^{-i\theta}\right)$

$\Leftrightarrow \quad f(z) = \frac{2r}{3}\left(\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)$

$= \frac{2r}{3}\left(\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)\right)$

$= \frac{2r}{3}\left(\frac{\cos\theta}{4} + i\frac{\sin\theta}{4} + i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} + \frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad f(z) = \frac{2r}{3}\left(\frac{3\cos\theta}{4} + i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} - i\frac{\sin\theta}{4}\right)$

$= \frac{2r}{3}\left(\left(\frac{3\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - i\frac{\sin\theta}{4}\right)\right)$

$= \frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\right)$

$= \frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{i}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{f(z) = \frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}$

■ (III) ②

لدينا : $f(z_{k-1})$ هو لحق النقطة M_k بحيث : $k \epsilon \{1, \ldots, n\}$

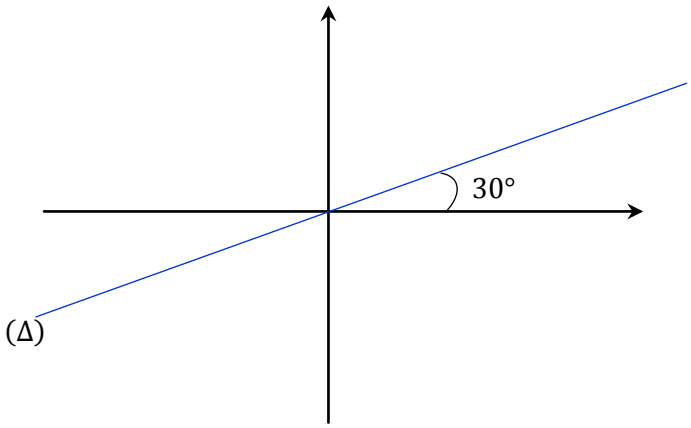
و لدينا : $f(z) = \frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$\Rightarrow \quad f(z_{k-1}) = \frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$\Rightarrow \quad arg(f(z_{k-1})) \equiv arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)[2\pi]$

$\Rightarrow \quad arg(f(z_{k-1})) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

و بالتالي النقط M_1 و M_2 و ⋯ و M_n تنتمي إلى نفس المستقيم (Δ) المبين في الشكل التالي :



Telemidi.com صفحة لمدرسي الرياضيات

التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ (I) ① ——————

$$2y^2 - 4y - 7x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y^2 - 2y) = 7x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y-1)^2 = 7x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \frac{7}{2}x + 1$$

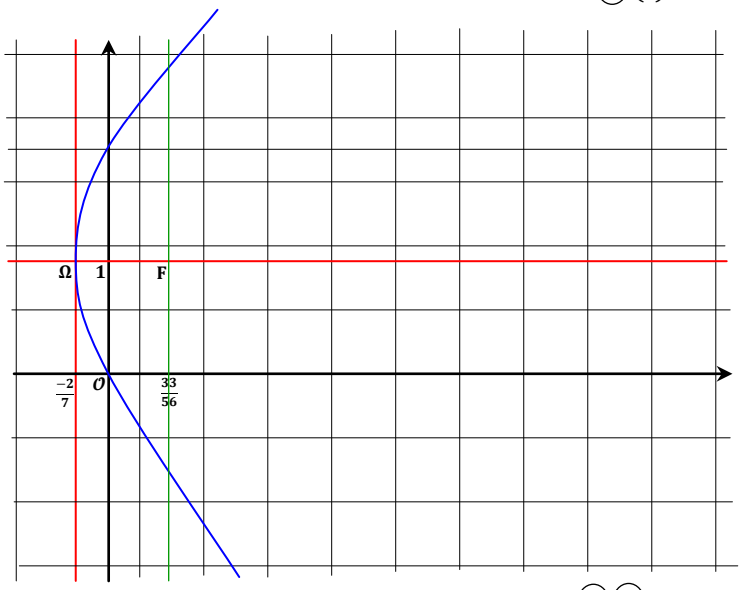
$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \frac{7}{2}\left(x + \frac{2}{7}\right)$$

إذن (Γ) شلجم رأسه : $\Omega\left(\frac{-2}{7}; 1\right)$

و بؤرته : $F\left(\frac{7}{8} - \frac{2}{7}; 0 + 1\right)$

يعني : $F\left(\frac{33}{56}; 1\right)$

■ (I) ② ——————



■ (II) ① أ ——————

لدينا : $2(y-1)^2 = 7x + 2$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y^2 - 2y + 1) = 7x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2y(y-2) = 7x$$

$$\Leftrightarrow \quad 7 \,/\, 2y(y-2)$$

و بما أن العدد 7 أولي فإن :

$$\Leftrightarrow \quad 7 \,/\, (y-2) \quad \text{أو} \quad 7/y \quad \text{أو} \quad 7/2$$

$$\Leftrightarrow \quad y \equiv 2[7] \quad \text{أو} \quad y \equiv 0[7]$$

■ (II) ① ب ——————

في حالة : $y \equiv 0[7]$.

لدينا : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; y = 7k$

و لدينا : $2y(y-2) = 7x$

يعني : $2(7k)(7k-2) = 7x$

إذن : $x = 14k^2 - 4k$

و في حالة : $y \equiv 2[7]$.

لدينا : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; y = 7k + 2$

و لدينا : $2y(y-2) = 7x$

يعني : $2(7k+2)(7k) = 7x$

إذن : $x = 14k^2 + 4k$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\mathcal{S} = \{(14k^2 - 4k \; ; \; 7k), (14k^2 + 4k \; ; \; 7k + 2) \quad / \quad k \epsilon \mathbb{Z}\}$$

■ (II) ② ——————

لدينا : $x \wedge y = 9$

في حالة : $x = 14k^2 - 4k$ و $y = 7k$

لدينا حسب خوارزمية إقليدس :

$14k^2 - 4k$	$7k$
$-4k$	$2k$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن :

$$(14k^2 - 4k) \wedge (7k) = (7k) \wedge (-4k) = k$$

لأن : $7 \wedge (-4) = 1$

و منه : $x \wedge y = k = 9$

و منه نحصل على النقطة : $M_1(1098 \; ; 63)$.

Telemidi.com

في حالة : $x = 14k^2 + 4k$ و $y = 7k + 2$

لدينا : $14k^2 + 4k = 2k(7k + 2)$

إذن من هذه النتيجة نستنتج أن :

$(14k^2 + 4k) \wedge (7k + 2) = (7k + 2)$

و منه : $x \wedge y = 7k + 2 = 9$

يعني : $k = 1$

و منه نحصل على النقطة : $M_2(18\,;9)$.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

■ ①

لدينا : $\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t}{3+t^2}$

$$= \frac{t(3+t^2) + (1-t)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{t^2 + 2t + 1}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

ملاحظة : المسار العكسي لهذه المتساوية ستتم دراسته بتفاصيله في السنة الأولى من الأقسام التحضيرية أو الأسدس الثاني من الجامعة أو السنة الأولى من (BTS) .و هذه العملية تسمى :

< la décomposition d'une fraction rationnel en éléments simples >

مثال : $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)}$

■ ②

لدينا : $\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt = \frac{1}{3}\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{3}}\right) dt$

نضع : $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$ إذن : $dt = \sqrt{3}du$

و منه : $\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1+u^2}\right) dt$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3}[Arctan\, u]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)}$$

■ ③ أ

لدينا : $u \to \frac{1+\sin u}{2+\cos u}$

دالة متصلة على المجال $[0,\pi]$ لأنها خارج معرَّف لدالتين متصلتين على $[0,\pi]$ بحيث : $2 + \cos u \neq 0$

إذن فهي تقبل دالة أصلية F على المجال $[0,\pi]$.

يعني : F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,\pi]$.

و لدينا : $F'(x) = \frac{1+\sin x}{2+\cos x}$

■ ③ ب

ليكن x عنصرا من المجال $[0,\pi[$

لدينا : $F(x) = \int_0^x \left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right) du$

نضع : $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$ إذن : $\frac{dt}{du} = \frac{1+t^2}{2}$

و منه : $F(x) = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\right)\left(\frac{2}{1+t^2}\right) dt$

$$F(x) = 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

■ ③ ج

$$F(x) = 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

$$= 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}\right) dt$$

$$= 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2}\right) dt - 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{3+t^2}\right) dt + 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt$$

$$= [\ln(1+t^2)]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} - [ln(3+t^2)]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{\sqrt{3}} Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

$$= \ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - ln\left(3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

■ ③ د

لدينا F متصلة على يسار π إذن : $\lim\limits_{x\to\pi^-} F(x) = F(\pi)$

إذن :

$$\lim_{x\to\pi^-}\left(ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right) = \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right)du \quad (*)$$

و لدينا :

$$\lim_{x\to\pi^-} ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}} ln\left(\frac{1+\frac{1}{u}}{1+\frac{3}{u}}\right) = ln1 = 0$$

و لدينا كذلك:

$$\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan(" +\infty ") = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

نعوض هاتين النهايتين في المتساوية $(*)$ نحصل على :

$$ln3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right)du$$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

■ ① أ

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right) = (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right)$$

$$= (-\infty)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{0^-}\right)$$

$$= +\infty$$

■ ① ب

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right) = \frac{1}{n}$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_n(x) - \frac{1}{n}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{-nx}) = 0$

كما نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

إذن من هذه النتائج نستنتج أن المستقيم $y = \frac{1}{n}x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right) = +\infty$

و نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$

إذن $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب نحو الأسفل.

■ ②

$$f_n'(x) = \left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right)' = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

نستنتج جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	↗	$+\infty$

■ ③ أ

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n .

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

بما أن : $0\in\mathbb{R}$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α_n من $\mathbb{R}$ بالتقابل f_n .

و بالتالي : $(\exists!\,\alpha_n\in\mathbb{R})\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0$

■ ③ ب

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{e}\right)$$

بما أن : $n\geq 2$ فإن : $n^2\geq 4$.

أي : $n^2\geq 4>e$ و منه : $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{e}$

يعني : $\frac{1}{n^2}-\frac{1}{e}<0$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\geq 2)\ ;\ f_n\left(\frac{1}{n}\right)<0}$

■ ③ ج

نضع : $\varphi(x)=e^x-x-1$ إذن : $\varphi'(x)=e^x-1$

و منه : نستنتج جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

بما أن φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية حسب الجدول هي 0

فإنه : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)\geq 0$

يعني : $\boxed{(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x\geq x+1}$

و من هذه المتفاوتة نستنتج : : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ e^n\geq n+1$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ e^n\geq n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n}<\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow e^{-n}<\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{n}-e^{-n}>0}$ (*)

$\Leftrightarrow f_n(1)=\frac{1}{n}-e^{-n}>0$

■ ③ د

لدينا f_n دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي متصلة على $\left[\frac{1}{n}\ ;1\right]$ بحيث : $n\geq 2$.

و لدينا : $f_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$ و $f_n(1)>0$

إذن : $f_n(1)\cdot f_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$

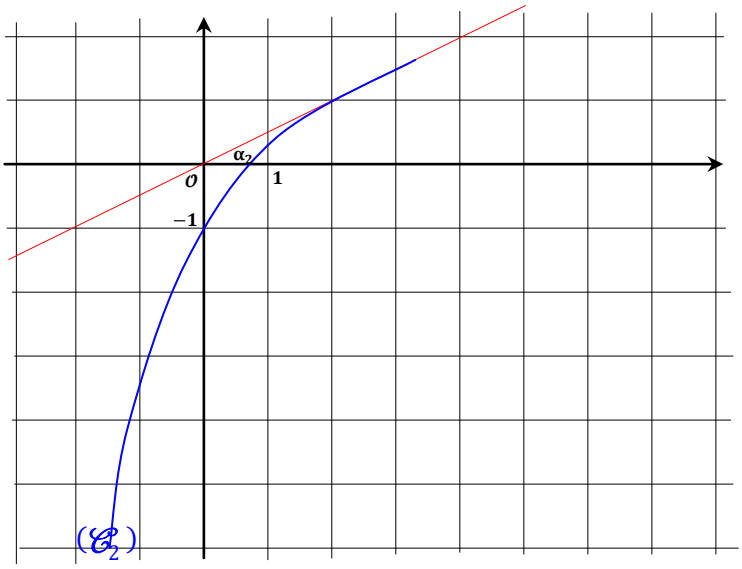
و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية :

$\exists\, c\,\epsilon\left]\frac{1}{n}\ ,1\right[\ ;\ f_n(c)=0$

و بما أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا و هو α_n .

فإن $\alpha_n=c$ و منه : $\boxed{\frac{1}{n}<\alpha_n<1}$

■ ④



■ ⑤ أ

$f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{\alpha_n}{n+1}-e^{-(n+1)\alpha_n}$

$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{\alpha_n-ne^{-(n+1)\alpha_n}-e^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$

$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(\frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}}-1-\frac{1}{n}\right)$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n)=0$ إذن : $e^{-n\alpha_n}=\frac{\alpha_n}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}}=\frac{\alpha_n}{n(e^{-n\alpha_n})\cdot e^{-\alpha_n}}$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}}=\frac{\alpha_n}{n\cdot\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\cdot e^{-\alpha_n}}$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}}=e^{\alpha_n}$

و بالتالي : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n}-1-\frac{1}{n}\right)}$

■ (5) (ب)

لدينا حسب السؤال : (ج) (3) $e^{\alpha_n} \geq \alpha_n + 1$ (#)

و لدينا حسب السؤال : (د) (3) $\alpha_n > \frac{1}{n}$

إذن : $\alpha_n + 1 > \frac{1}{n} + 1$ (##)

من (#) و (##) نستنتج أن : $e^{\alpha_n} \geq \frac{1}{n} + 1$

يعني : $e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$

و بالتالي : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

لأن الكمية $\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$ موجبة دائما .

■ (5) (ج)

لدينا : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ (⋆)

لأن f_{n+1} حل للمعادلة : $f_{n+1}(x) = 0$.

و لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$ (⋆⋆)

من (⋆) و (⋆⋆) نستنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

فإن : $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$

و بالتالي : $(\alpha_n)_n$ تناقصية . (1)

و لدينا : $\frac{1}{n} > 0$ و $\frac{1}{n} < \alpha_n$

إذن : $\alpha_n > 0$

يعني : $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ مصغورة بالعدد 0 (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة.
و سوف نحدد نهايتها فيما بعد.

■ (6) (أ)

ليكن $n \geq 2$.

لدينا : $f_n(\alpha_n) = 0$ إذن : $e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n}$

و نعلم أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$ إذن : $\frac{1}{n^2} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1}{n}$

و بالتالي : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

■ (6) (ب)

لدينا : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

إذن : $\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) < \ln(e^{-n\alpha_n}) < \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

لأن الدالة ln تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_*^+$.

و منه : $-2\ln(n) < -n\alpha_n < -\ln(n)$

إذن : $\ln(n) < n\alpha_n < 2\ln(n)$

و بالتالي : $\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n}$

■ (6) (ج)

من التأطير الثمين الأخير الذي حصلنا عليه نستنتج أن :

$\lim_{n\infty}(\alpha_n) = 0$

لأن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \lim_{n\infty}\left(\frac{2ln\, n}{n}\right) = 0$

■ و الحمد لله رب العالمين ■