



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,0 ن)

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F ، (كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

① ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟

0,50 ن

② أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل .

0,50 ن

③ أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A .

1,00 ن

التمرين الثاني : (4,0 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر التطبيق f المعروف من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} بما يلي :

$$f(z) = \frac{1}{6} \left((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right)$$

(I) حل في \mathbb{C} المعادلة : $f(z) = 0$.

0,50 ن

(II) نضع $z_0 = 1$ و $z_{n+1} = f(z_n)$ لكل n من \mathbb{N} و نرمز بـ u_n لمعيار العدد العقدي z_n .

① (أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

0,50 ن

ⓑ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

0,50 ن

② لكل n من \mathbb{N} نضع : $S_n = \sum_{k=0}^n OM_k = OM_1 + \dots + OM_n$

و لكل k من \mathbb{N} نعتبر M_k صورة العدد العقدي z_k .

① بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n \leq 3$.

0,50 ن

ⓑ بين أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ متقاربة (حساب نهاية $(S_n)_{n \geq 0}$ غير مطلوب)

0,50 ن

(III) نضع $z = re^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi, \pi]$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$.

① بين أن : $f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$

1,00 ن

② بين أن النقط M_1 و M_2 و و M_n مستقيمة $(n \in \mathbb{N}^*)$.

0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2 - 4y - 7x = 0$.

① (I) بين أن (Γ) شلجم و حدد رأسه و بؤرتيه. ن 0,75

② أنشئ المنحنى (Γ) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . ن 0,25

(II) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(E) : 2(y - 1)^2 = 7x + 2$.

① (j) بين أن : $y \equiv 0[7]$ أو $y \equiv 2[7]$ ن 1,00

ب) استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : ن 0,50

$$S = \{(14K^2 - 4k ; 7k) / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(14k^2 + 4k ; 7k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

② حدد النقط $M(x, y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ و $x \wedge y = 9$ ن 1,00

التمرين الرابع : (3,0 ن)

① بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}) ; \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{(3+t^2)} + \frac{1}{(3+t^2)}$ ن 0,25

② بين أن : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; \int_0^\alpha \frac{1}{(3+t^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$ ن 0,50

③ نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, \pi]$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} du$ ن 0,50

① بين أن F قابلة للإشتقاق على $[0, \pi]$. ن 0,50

ب) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t = \tan \left(\frac{u}{2} \right)$ بين أن : ن 0,50

$$(\forall x \in [0, \pi[) ; F(x) = 2 \int_0^{\tan \frac{\pi}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

نذكر أن : $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$ حيث : $t = \tan \frac{u}{2}$ و $u \in [0, \pi[$ ن 0,75

ج) باستعمال السؤالين ① و ② بين أن : ن 0,75

$$(\forall x \in [0, \pi[) ; F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{\tan \left(\frac{x}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \right)$$

د) باستعمال اتصال الدالة F بين أن : $\int_0^\pi \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ن 0,50

التمرين الخامس : (3,0 ن)

في هذا التمرين x يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2

نعتبر الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

ليكن (\mathcal{E}_n) التمثيل المبياني للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

① (أ) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ن 0,50

ⓑ أدرس الفرعين اللانهائين للمنحنى (\mathcal{E}_n) . ن 0,75

② أحسب $f'_n(x)$ لكل x من \mathbb{R} ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n . ن 0,75

③ (أ) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R} . ن 0,50

ⓑ بين أن : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ ن 0,25

Ⓒ بين أن $e^x \geq x + 1$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ ثم استنتج أن $f_n(1) > 0$. ن 0,75

Ⓓ بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$ ن 0,50

④ أنشئ المنحنى (\mathcal{E}_2) (نأخذ : $\alpha_2 \approx 0,6$) ن 0,50

⑤ (أ) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N})$ بحيث $n \geq 2$ لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$ ن 0,50

ⓑ استنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$; $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$ ن 0,50

Ⓒ بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. ن 0,75

⑥ (أ) باستعمال السؤال ③ بين أن : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$ ن 0,50

ⓑ استنتج أن : $\frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$ ن 0,50

Ⓒ حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ ن 0,25