التمرين الأول : (3,5 ن)

■ (I) ①

في البداية نلاحظ أن : $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من G

إذن $b \neq 0$ و $d \neq 0$

و منه : $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a+bc & bd\end{pmatrix}$

بما أن $b \neq 0$ و $d \neq 0$ فإن $bd \neq 0$

و منه : $(a+bc\,; bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

يعني : $M_{(a+bc\,,bd)} \in G$

و بالتالي G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (I) ②

لدينا × تجميعي في $(G\,,\times)$

لأن جزء مستقر من الزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و لدينا كذلك $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد لـ × في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن $I \in G$ فإن I هو نفسه العنصر المحايد لـ × في G ($I = M_{(0,1)}$)

ليكن $M_{(a,b)}$ عنصرا من G .

$M_{(a,b)}$ تقبل مماثلا (أو مقلوبا) في G بالنسبة لـ ×

إذا وفقط إذا كان : $det\left(M_{(a,b)}\right) \neq 0$

لدينا : $det\left(M_{(a,b)}\right) = \begin{vmatrix}1 & 0\\ a & b\end{vmatrix} = b - 0 = b$

و بما أن : $M_{(a,b)} \in G$ فإن : $b \neq 0$

و منه : $det\left(M_{(a,b)}\right) \neq 0$

إذن : $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و نُذَكِّرُ بالعلاقة المهمة التالية :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}$$

إذن :

$$M^{-1}_{(a,b)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{detM_{(a,b)}}\begin{pmatrix}b & 0\\ -a & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{b}\begin{pmatrix}b & 0\\ -a & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{-a}{b} & \frac{1}{b}\end{pmatrix} = M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)}$$

و بما أن : $b \neq 0$ فإن : $\frac{1}{b} \neq 0$

ومنه : $M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)} \in G$ أي : $M^{-1}_{(a,b)} \in G$

إذن : كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مماثلا $M_{\left(\frac{-a}{b};\frac{1}{b}\right)}$ في G بالنسبة لـ ×

نختار المصفوفتين $M_{(1,1)}$ و $M_{(2,2)}$ من G لكي نبين أن × ليس تبادليا في G

لدينا : $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

و $M_{(2,2)} \times M_{(1,1)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

نلاحظ أن : $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} \neq M_{(2,2)} \times M_{(1,1)}$

إذن × ليس تبادليا في G .

<u>خلاصة : $(G,\times)$ زمرة غير تبادلية.</u>

■ (I) ③

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا : $\mathcal{H} = \left\{M_{(a,b)} \in G \quad / \quad b > 0\right\}$

لدينا حسب ما سبق $I = M_{(0,1)} \in G$

و بما أن $1 > 0$ فإن $M_{(0,1)} \in \mathcal{H}$

و منه : $\mathcal{H}$ جزء غير فارغ من G

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من $\mathcal{H}$

لدينا حسب ما سبق :

$$M_{(a,b)} \times M^{-1}_{(c,d)} = M_{(a,b)} \times M_{\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{-c}{d} & \frac{1}{d}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ \left(a - \frac{bc}{d}\right) & \frac{b}{d}\end{pmatrix}$$

بما أن $d > 0$ و $b > 0$ فإن : $\frac{b}{d} > 0$

و منه :

$$M_{(a,b)} \times M^{-1}_{(c,d)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \left(a - \frac{bc}{d}\right) & \frac{b}{d}\end{pmatrix} = M_{\left(\left(a-\frac{bc}{d}\right);\frac{b}{d}\right)} \in \mathcal{H}$$

و بالتالي نستنتج أن $(\mathcal{H}\,,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G\,,\times)$.

■ (I) 4

ليكن a و b عددين حقيقيين.

لدينا : $\boxed{M_{(a,1)} \times M_{(b,1)} = M_{(a+b\,;1)}}$ $(*)$

إذن باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على :

$$M_{(a_1,1)} \times M_{(a_2,1)} \times \cdots \times M_{(a_n,1)} = M_{((\sum_1^n a_i),1)}$$

و منه : $M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)} = M_{(na,1)}$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \left(M_{(a,1)}\right)^n = M_{(na,1)}$

يعني : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

و إن لم تكن هذه الطريقة مقنعة بما فيه الكفاية فعليك بالترجع :

■ (II) 1

لتكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ مصفوفتين من G .

لدينا : $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(a+bc\,,bd)}$

و منه : $\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}\right) = \varphi\left(M_{(a+bc,bd)}\right) = (a+bc\,,bd)$

و لدينا كذلك :

$$\varphi\left(M_{(a,b)}\right) \top \varphi\left(M_{(c,d)}\right) = (a,b) \top (c,d) = (a+bc\,;bd)$$

و بالتالي :

$$\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}\right) = \varphi\left(M_{(a,b)}\right) \top \varphi\left(M_{(c,d)}\right)$$

و منه φ تشاكل من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

ليكن (c,d) عنصرا من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

لنحل المعادلة : $\varphi\left(M_{(x,y)}\right) = (c,d)$

التي تُكافئ : $(x,y) = (c,d)$

و منه : $x = c$ و $y = d$

إذن المعادلة : $\varphi\left(M_{(x,y)}\right) = (c,d)$ تقبل حلا وحيدا في G و هو المصفوفة $M_{(c,d)}$.

و منه : G تقابل من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$

خلاصة : تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

■ (II) 2

رأينا أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$

و نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

إذن نستنتج بنية $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ انطلاقا من بنية $(G,\times)$ عن طريق التطبيق φ

بما أن $(G,\times)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو المصفوفة $M_{(0,1)}$ و أن كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مماثلة $M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)}$ في G بالقانون $\times$.

فإن : $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\top$ هو $\varphi\left(M_{(0,1)}\right)$ و أن كل زوج (c,d) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$ في G بالقانون $\top$.

إذن : $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد $(0,1)$ و كل عنصر (c,d) يقبل مماثلا و هو $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$.

■ (II) 3

باستعمال الأدوات التالية :
- φ تشاكل .
- تعريف التطبيق φ
- $\left(M_{(a,1)}\right)^n = M_{(na,1)}$
- $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$ هو مماثل (c,d) بالنسبة لـ $\top$

نبرهن بكل بساطة على أن : $(a,1) \top \cdots \top (a,1) = (-na,1)$

لدينا : $[(a,1) \top (a,1) \top \cdots \top (a,1)]'$

$$= \left[\varphi\left(M_{(a,1)}\right) \top \varphi\left(M_{(a,1)}\right) \top \cdots \top \varphi\left(M_{(a,1)}\right)\right]'$$

$$= \left[\varphi\left(M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)}\right)\right]'$$

$$= \left[\varphi\left(\left(M_{(a,1)}\right)^n\right)\right]'$$

$$= \left[\varphi\left(M_{(na,1)}\right)\right]'$$

$$= \left(\frac{-na}{1};\frac{1}{1}\right)$$

$$= (-na;1)$$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ ① أ

لدينا : (x,y) حل للمعادلة (E)

يعني : $x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$

يعني : $(ad)^2(ad+bd) = (bd)^2(ad-bd)^2$

يعني : $a^2d^3(a+b) = b^2d^3(a-b)^2d$

نختزل بالعدد d^3 لأن $d^3 \neq 0$

نحصل على : $a^2(a+b) = db^2(a-b)^2$

■ ① ب

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى أربع أدوات :

الأداة الأولى : $\boxed{a \wedge b = 1 \ \Rightarrow\ a^m \wedge b^n = 1 \ ;\ \forall (m,n) \epsilon \mathbb{N}^2}$

الأداة الثانية : $(Gauss)$ $\boxed{\begin{cases} a/bc \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow\ a\ /\ b}$

الأداة الثالثة : $(Bezout)$

$\boxed{a \wedge b = d \ \Leftrightarrow\ \exists (m,n) \epsilon \mathbb{Z}^2 \ ;\ ma + nb = d}$

الأداة الرابعة : $\boxed{\begin{cases} a\ /\ b \\ a\ /\ c \end{cases} \Rightarrow\ \forall (m,n) \epsilon \mathbb{Z} \ ;\ a/(mb+nc)}$

ننطلق من كون (x,y) حل للمعادلة (E)

لدينا : $d = x \wedge y$

إذن حسب $(Bezout)$ المباشرة : $\exists (u,v) \epsilon \mathbb{Z}^2 \ ;\ xu + yv = d$

و منه : $adu + bdv = d$

نختزل بالعدد الغير المنعدم d نحصل على : $au + bv = 1$

و منه حسب $(Bezout)$ العكسية : $a \wedge b = 1$

إذن حسب الأداة الأولى : $\boxed{a^2 \wedge b = 1}$ $(\star)$

بما أن الزوج (x,y) حل للمعادلة (E) فإنه حسب السؤال أ

$db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$

نضع : $k = bd(a-b)^2$ حيث : $k \epsilon \mathbb{Z}$

إذن : $(a+b)a^2 = kb$ و منه : $b\ /\ (a+b)a^2$

و بما أن : $a^2 \wedge b = 1$ حسب النتيجة $(\star)$ فإنه حسب $(Gauss)$: $b\ /\ (a+b)$

و نعلم أن $b\ /\ (-b)$ إذن حسب الأداة الرابعة :

$b\ /\ (a+b-b)$ يعني : $\boxed{b\ /\ a}$ (1)

و نعلم حسب ما سبق أن : $\boxed{a \wedge b = 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\boxed{b = 1}$

■ ① ج

نفترض أن : $a = 1$

لدينا : $b = 1$ إذن : $x = d$ و $y = d$.

بما أن (x,y) حل للمعادلة (E) فإن : $d^2(d+d) = d^2(d-d)^2$

يعني : $d = 0$ و هذا تناقض لأن $d = x \wedge y \neq 0$

و بالتالي : $\boxed{a \neq 1}$.

لدينا : $a - (a-1) = 1$

إذن : $(\exists\, u,v \epsilon \mathbb{Z}) \ ;\ au + (a-1)v = 1$

و في هذه الحالة لدينا : $u = 1$ و $v = -1$

و منه حسب $(Bezout)$: $a \wedge (a-1) = 1$

إذن حسب الأداة الأولى نستنتج أن : $\boxed{a^2 \wedge (a-1) = 1}$ $(\star\star)$

لدينا من جهة أخرى $b = 1$ إذن حسب السؤال أ

$(a+1)a^2 = d(a-1)^2$

نضع : $k = d(a-1)$ بحيث : $k \epsilon \mathbb{Z}$

إذن : $(a+1)a^2 = k(a-1)$ و منه : $(a-1)\ /\ (a+1)a^2$

من العلاقة $(\star\star)$ نستنتج حسب $(Gauss)$: $(a-1)\ /\ (a+1)$

■ ① د

لدينا : $(a-1)\ /\ (a+1)$ يعني : $\boxed{a \equiv -1[a-1]}$

و نعلم أن : $\boxed{a \equiv 1[a-1]}$ (لأن $(a-1)\ /\ (a-1)$)

إذن : $1 \equiv -1[a-1]$ يعني : $2 \equiv 0[a-1]$

و منه : $(a-1)\ /\ 2$

القواسم الصحيحة الطبيعية لـ 2 هي : 1 و 2

إذن : $a - 1 = 1$ أو $a - 1 = 2$

يعني : $a = 2$ أو $a = 3$

و نبرهن بكل بساطة على أنه :

إذا كان : $a = 2$ فإن : (x,y) يحقق المعادلة (E) .

و إذا كان : $a = 3$ فإن : (x,y) يحقق كذلك المعادلة (E) .

■ ②

لنحل المعادلة (E)

الحالة الأولى : إذا كان $(a,b)=(2,1)$

إذن : $(x,y)=(2d,d)$

و منه : $(E)\ :\ (2d)^2(2d+d)=d^2d^2$

يعني : $(4d^2)(3d)=d^4$ أي : $\boxed{d=12}$

و بالتالي : $(x,y)=(24,12)$

الحالة الثانية : إذا كان $(a,b)=(3,1)$

إذن : $(x,y)=(3d,d)$

و منه : $(E)\ :\ (3d)^2(3d+d)=d^2(2d)^2$

يعني : $36d^3=4d^4$ أي : $\boxed{d=9}$

و بالتالي : $(x,y)=(27,9)$

خلاصة : الزوجان $(24,12)$ و $(27,9)$ هما حلا المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (5,0 ن)

■ (I) ①

نضع : $z=x+iy$ و M هي صورة العدد العقدي z

بحيث : x و y عددين حقيقيين.

لدينا : $P(z)=z^2-(2+6i)z$

$$\Leftrightarrow\ P(z)=(x+iy)^2-(2+6i)(x+iy)$$

$$\Leftrightarrow\ P(z)=x^2-y^2+2ixy-(2x+2iy+6ix-6y)$$

$$\Leftrightarrow\ P(z)=x^2-y^2+2ixy-2x-2iy-6ix+6y$$

$$\Leftrightarrow\ P(z)=(x^2-y^2-2x+6y)+i(2xy-2y-6x)$$

و لدينا $P(z)$ عدد تخيلي صرف.

إذن : $\boxed{\Re e(P(z))=0}$

يعني : $x^2-y^2-2x+6y=0$

و منه : $x^2-y^2-2x+6y=0$ هي معادلة ديكارتية مميزة للنقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا.

■ (I) ②

في المعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ المجموعة $(\mathcal{H})$ تتميز بالمعادلة :

$$(x^2-y^2-2x+6y)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x^2-2x)-(y^2-6y)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x^2-2x+1)-(y^2-6y+9)=-8$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2-(y-3)^2=-8$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{2})^2}-\frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{2})^2}=-1$$

إذن : $(\mathcal{H})$ هذلول مركزه النقطة $C(1,0)$ و رأساه هما $B(1\,;3+2\sqrt{2})$ و $\bar{B}(1\,;3-2\sqrt{2})$ و مقارباه هما المستقيمان (Δ) و (Δ') المعرفين بما يلي :

$(\Delta) : y-3=x-1$ و $(\Delta') : y-3=1-x$

يعني : $(\Delta) : y=x+2$ و $(\Delta') : y=4-x$

■ (I) ③

الزوج $(0,0)$ يحقق معادلة المجموعة $(\mathcal{H})$.

لأن : $0^2-0^2-2\times0+6\times0=0$ إذن : $O\epsilon(\mathcal{H})$

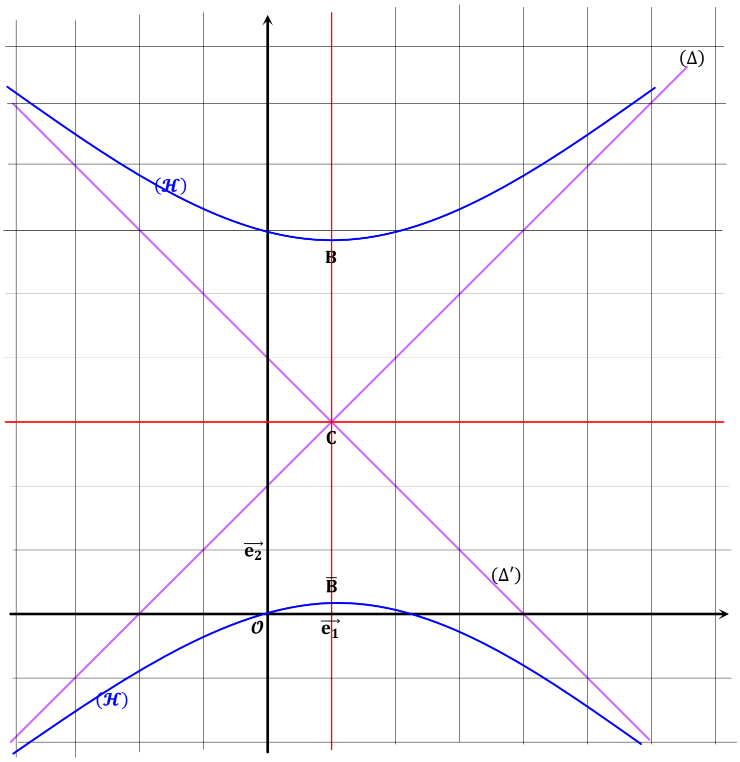
نعلم أن معادلة المماس (T_O) للهذلول $(\mathcal{H})$ في النقطة O تكتب على الشكل :

$$(T_O):\ \ xx_0-yy_0=(x+x_0)-3(y+y_0)$$

حيث : $x_0=0$ و $y_0=0$

و منه : $\boxed{(T_O)\ :\ x-3y=0}$

■ (I) ④



■ (II) ①

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 - (2+6i)z + (6i-4) = 0$$

لدينا : $\Delta = (2+6i)^2 - 4(6i-4)$

$$= (4i)^2$$

إذن : $z_1 = \dfrac{(2+6i)+4i}{2} = 1 + 5i$

و $z_2 = \dfrac{(2+6i)-4i}{2} = 1 + i$

■ (II) ② أ

لدينا $u = 1 + 5$ و $v = 1 + i$ و $\omega = 239 - i$:

لدينا حسب مثلث $(Pascal)$:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

$\boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1}$ معاملات الحدودية : $(a+b)^4$

إذن :

$$u^4 = (1+5i)^4 = 1^4 + 4(5i) + 6(5i)^2 + 4(5i)^3 + (5i)^4$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4 = 1 + 20i - 150 - 500i + 625$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4 = 476 - 480i$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4 \times v = (476 - 480i)(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4 \times v = 476 + 476i - 480i + 480$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4 \times v = 956 - 4i$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4 \times v = 4(239 - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{u^4 \times v = 4\omega}$$

■ (II) ② ب

لدينا : $\alpha = Arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \; tan(\alpha) = \frac{1}{5} \qquad \Leftrightarrow \; 5 = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \; 5i = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}i \qquad \Leftrightarrow \; \boxed{1 + 5i = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}i + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \frac{sin(\alpha) + icos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \left(\frac{1}{sin(\alpha)}\right)\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \left(\frac{1}{sin(\alpha)}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

لدينا : $sin(\alpha) \approx 0{,}19 \neq 0$

إذن : $arg(u) \equiv \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)[2\pi]$

بنفس الطريقة لدينا : $\beta = Arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad 239 = \frac{cos(\beta)}{sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 239 - i = \frac{cos(\beta)}{sin(\beta)} - i$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{cos(\beta) - isin(\beta)}{sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \left(\frac{1}{sin(\beta)}\right)\left(cos(-\beta) + isin(-\beta)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \left(\frac{1}{sin(\beta)}\right)e^{-\beta i}$$

$$\Leftrightarrow \quad arg(\omega) = -\beta[2\pi]$$

■ (II) ② ج

أشير في البداية إلى أن $(1+i) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \quad arg(v) = arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

و لدينا حسب السؤال أ $u^4 \times v = \omega$

$$\Rightarrow \quad arg(u^4 \times v) \equiv arg(\omega)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad 4arg(u) + arg(v) \equiv arg(\omega)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

نستعين بالآلة الحاسبة و نضبط وحدة قياس الزوايا على الراديان .

لدينا : $\alpha \approx 0{,}2\ rad$ و $\beta \approx 0{,}004\ rad$

و نلاحظ أن : $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$

و من هذين التأطيرين نحصل على : $-1 < 4\alpha - \beta < 4$

أي : $-1 < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 4$

و منه : $-0{,}3 < k < 0{,}5$

إذن : $k = 0$

و بالتالي : $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

أي :
$$\boxed{4Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}}$$

<u>التمرين الرابع : (9,0 ن)</u>

■ 1

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*) \; ; \; g_n(x) = nx + 2lnx$

g_n دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و هما $x \to nx$ و $x \to 2lnx$.

و لدينا : $g_n'(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx+2}{x} > 0$

إذن g_n دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+} g_n(x) = -\infty$

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	
g_n	$-\infty$ ↗	$+\infty$

■ 2

نضع : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*) \; ; \; h(x) = \sqrt{x} - lnx$

$$h'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} - lnx\right)'$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{x-4}{2x(\sqrt{x}+2)}$$

و لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*) \; ; \; \frac{1}{2x(\sqrt{x}+2)} > 0$

إذن إشارة $h'(x)$ متعلقة بإشارة $(x-4)$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = +\infty$

و : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

x	0	4	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	$+\infty$ ↘	$2 - ln4$	↗ $+\infty$

انطلاقا من هذا الجدول نلاحظ أن $(2 - ln4)$ قيمة دنوية للدالة h على $\mathbb{R}_+^*$

يعني أن : $(\forall x > 0) \; ; \; h(x) > 2 - ln4$

لدينا : $2 - ln4 \approx 0{,}6 > 0$

إذن : $\forall x > 0 \; ; \; h(x) > 0$

و منه :
$$\boxed{\forall x > 0 \; ; \; \sqrt{x} > lnx}$$

■ 3 أ

لدينا g_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

إذن g_n تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $g_n(]0,+\infty[)$

و لدينا :
$$g_n(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to0^+} g_n(x) \; ; \; \lim_{x\to+\infty} g_n(x)\right[$$
$$=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$$

من جهة أخرى لدينا : $\left]\frac{1}{n};\frac{1}{\sqrt{n}}\right[\subset \mathbb{R}_+^*$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$

و لدينا كذلك : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1-2ln(n)$

علما أن $n \geq 3$ نستنتج أن : $1-2ln(n) \leq 1-2ln3$

لدينا $1-2ln3 \approx -1{,}2$ إذن : $1-2ln(n) < 0$

و منه : $\boxed{g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0}$ (1)

و لدينا كذلك :

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 2ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + ln\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \sqrt{n} - ln(n)$$

بما أن $n > 0$ فإنه حسب السؤال 2 $\sqrt{n} > ln(n)$

يعني $\sqrt{n} - ln(n) > 0$ و منه : $\boxed{g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

نتوفر الآن على جميع الشروط اللازمة لتطبيق مبرهنة القيم الوسيطية.

إذن : $\exists!\, \alpha_n \epsilon \left]\frac{1}{n};\frac{1}{\sqrt{n}}\right[\quad / \quad g_n(\alpha_n) = 0$

و منه : المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$.

■ 3 ب

لدينا : $\begin{cases} \frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \end{cases}$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n) = 0}$

الجزء الثاني

■ (I) 1

لدينا : $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt[3]{x}e^{-x}}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}e^x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا رأسيا موجها نحو الأعلى في الصفر.

■ (I) 2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}\right)\times\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{+\infty}\right)\times\left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$$

إذن :$(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاصيل.

■ (I) 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $f(x) = x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$

إذن : $$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}e^{-x} - e^{-x}x^{\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}e^{-x}\right)\left(\frac{1}{3}x^{-1}-1\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}e^{-x}\right)\left(\frac{1}{3x}-1\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}e^{-x}\right)\left(\frac{1-3x}{3x}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$$

■ (I) 3 ب

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$

بما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$; $e^{-x} > 0$

و $(\forall x > 0)$; $x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}lnx} > 0$ و $3x > 0$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة بـ $(1-3x)$

إذا كان $x = \frac{1}{3}$ فإن : $f'(x) = 0$

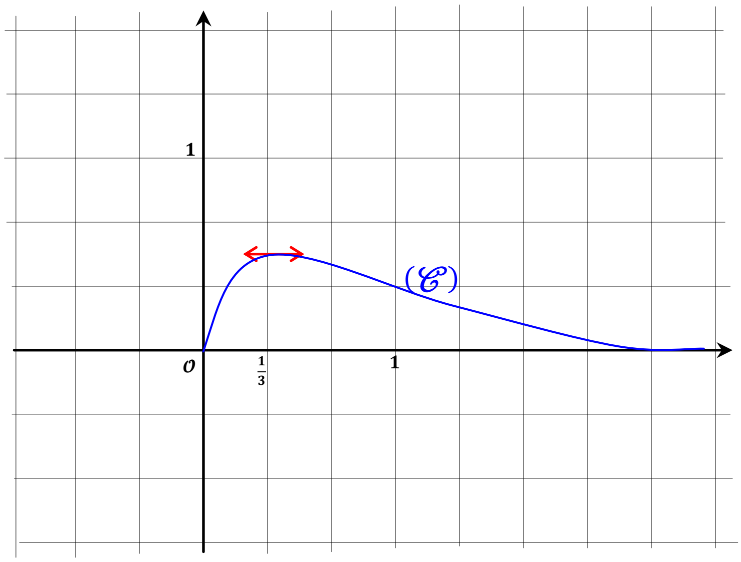
إذا كان $x > \frac{1}{3}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان $x < \frac{1}{3}$ فإن : $f'(x) > 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	0

■ (I) ④



■ (II) ① أ

لدينا : $I = \left[\frac{1}{3};1\right]$

ليكن : $y \in f(I)$

هذا يعني أن : $(\exists x\in I)\ ;\ f(x) = y$

لدينا : $\frac{1}{3} \le x \le 1$ و f دالة تناقصية على I

إذن : $f\left(\frac{1}{3}\right) \ge f(x) \ge f(1)$

أي : $0,5 \ge y \ge 0,36$

و منه : $1 > 0,5 \ge y > 0,36 \ge \frac{1}{3}$

إذن : $1 \ge y \ge \frac{1}{3}$

و منه : $\boxed{y \in I}$

حصلنا إذن على الإستلزام التالي : $\boxed{y \in f(I) \ \Rightarrow\ y \in I}$

و بالتالي : $f(I) \subset I$

■ (II) ① ب

لدينا : $(\forall x > 0)\ :\ f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

ليكن x عنصرا من $I = \left[\frac{1}{3};1\right]$ إذن : $x \ge \frac{1}{3}$

و منه : $f(x) \le f\left(\frac{1}{3}\right)$ لأن f تناقصية على المجال $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

يعني : $f(x) \le 0,5 < 1$

و منه : $f(x) < 1$

إذن : $\boxed{|f(x)| < 1}$ (1)

لدينا : $x \in \left[\frac{1}{3};1\right]$ أي : $x \ge \frac{1}{3}$

و منه : $x > \frac{1}{5}$ يعني : $5x > 1$

يعني : $3x + 2x > 1$

يعني : $2x > 1 - 3x$

يعني : $\boxed{2 > \frac{1-3x}{x}}$ $(*)$

و لدينا : $x \in \left[\frac{1}{3};1\right]$ أي : $x \le 1$

و منه : $1 - x \ge 0$ يعني : $1 - 3x + 2x \ge 0$

يعني : $1 - 3x \ge -2x$

يعني : $\boxed{\frac{1-3x}{x} \ge -2}$ $(**)$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $-2 \le \frac{1-3x}{x} < 2$

أي : $\boxed{\left|\frac{1-3x}{x}\right| \le 2}$ (2)

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-3x}{x}\right) f(x)$$

$$\Rightarrow\quad |f'(x)| = \frac{1}{3}\left|\frac{1-3x}{x}\right| |f(x)|$$

من (1) و (2) نجد : $|f(x)| < 1$ و $\left|\frac{1-3x}{x}\right| \le 2$

و منه : $\boxed{|f'(x)| \le \frac{2}{3}}$

■ (II) ① ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا

لدينا : $f(x) = x$ يعني : $\sqrt[3]{x}e^{-x} = x$

إذن : $xe^{-3x} = x^3$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على : $e^{-3x} = x^2$

ندخل الدالة ln على هاتين الكميتين الموجبتين نحصل على : $-3x = 2lnx$

يعني : $3x + 2lnx = 0$ و منه : $g_3(x) = 0$

و نعلم حسب السؤال ③ أ من الجزء الأول أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

إذن : $x = \alpha_3$ بحيث : $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$

■ (II) ② أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نبرهن بالترجع على أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n \epsilon I$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \frac{1}{3} \epsilon \left[\frac{1}{3};1\right] = I$

إذن : $u_0 \epsilon I$

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n \epsilon I$

بما أن f متصلة على المجال I .

فإن : $u_n \epsilon I \implies f(u_n) \epsilon f(I)$

و نعلم أن : $f(I) \subset I$ و ذلك حسب السؤال ① أ

إذن : $f(u_n) \epsilon f(I) \subset I$

و منه : $u_{n+1} \epsilon I$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n \epsilon I}$

■ (II) ② ب

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \overset{(1)}{\boxed{u_n \epsilon I}}$

و لدينا كذلك حسب نتيجة السؤال ج : $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$

إذن : $\boxed{\alpha_3 \epsilon I}\ (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $[u_n;\alpha_3] \subset I$

و بما أن f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على I .

فإن f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على : $[u_n;\alpha_3]$ كذلك

و منه : حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists\ c \epsilon\ ]u_n,\alpha_3[\ ;\ \frac{f(u_n) - f(\alpha_3)}{u_n - \alpha_3} = f'(c)$$

و منه : $|f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq |f'(c)| \times |u_n - \alpha_3|$

و بما أن : $(\forall\ x \epsilon I)\ ;\ |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ حسب السؤال ب

فإن : $\forall \epsilon n \mathbb{N}\ ;\ |f'(c)||u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

يعني : : $|f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

■ (II) ② ج

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا حسب السؤال ب

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha_3| &\leq \frac{2}{3}|u_{n-1} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)|u_{n-2} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)|u_{n-3} - \alpha_3| \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_{n-n} - \alpha_3| \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3|}\ (\ast)$

لدينا : $\alpha_3 \epsilon I$ يعني : $\frac{1}{3} \leq \alpha_3 \leq 1$

و منه : $\frac{-2}{3} \leq \frac{1}{3} - \alpha_3 \leq \frac{2}{3}$ أي : $\left|\frac{1}{3} - \alpha_3\right| \leq \frac{2}{3}$

يعني : $|u_0 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ نحصل على :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

و نعلم أن $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3|$
و ذلك حسب : $(\ast)$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

■(II)②د

لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3$

بما أن : $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و -1 فإن :

$$\lim_{n\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$$

و منه : $\lim_{n\infty} \left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

و $\lim_{n\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات : $\boxed{\lim_{n\infty} u_n = \alpha_3}$

■(III)①أ

لدينا f دالة متصلة على $[0,+\infty[$

إذن : f متصلة على المجال $[0,x]$ كيفما كان x من $\mathbb{R}_+^*$.

و منه : f تقبل دالة أصلية h على المجال $[0,x]$.

يعني : h قابلة للإشتقاق على $[0,x]$ بحيث : $h'(x) = f(x)$

و لدينا : $F(x) = \int_x^{8x} f(t)\,dt$

$$= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{8x} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{8x} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= h(8x) - h(0) - h(x) + h(0)$$

$$= h(8x) - h(x))$$

لدينا : $x > 0$ يعني : $8x > 0$

و منه : $x \to h(8x)$ قابلة للإشتقاق على : $]0,+\infty[$

لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على : $]0,+\infty[$

و بالتالي : F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

■(III)①ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا : $F(x) = h(8x) - h(x)$

إذن : $F'(x) = 8h'(8x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 8\sqrt[3]{8x}\ e^{-8x} - \sqrt[3]{x}\ e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 8\left(8^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x})(e^{-7x}) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = (16e^{-7x} - 1)f(x)$$

و بما أن $\forall\, x\, \epsilon\, [0,+\infty[\ ;\ f(x) \geq 0$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(16e^{-7x} - 1)$

إذا كان : $x = \frac{ln16}{7}$ فإن : $F'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{ln16}{7}$ فإن : $F'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{ln16}{7}$ فإن : $F'(x) > 0$

و بالتالي : F دالة تزايدية على $\left[0,\frac{ln16}{7}\right]$ و تناقصية على $\left[\frac{ln16}{7},+\infty\right[$

■(III)②أ

ليكن x و t عددين حقيقيين موجبين بحيث : $x \leq t \leq 8x$

بما أن f دالة موجبة على : $[0,+\infty[$

فإن F دالة موجبة كذلك لأنها تكامل لدالة موجبة f .

و منه : $\boxed{F(x) \geq 0}$ (1)

ننطلق من الكتابة $t \leq 8x$ إذن : $t^{\frac{1}{3}} \leq (8x)^{\frac{1}{3}}$

نضرب طرفي المتفاوتة الأخيرة في العدد الموجب و الغير المنعدم e^{-t}

نحصل على : $e^{-t}\ t^{\frac{1}{3}} \leq e^{-t}(8x)^{\frac{1}{3}}$

بإدخال التكامل على طرفي هذه المتفاوتة نحصل على :

$$\boxed{\int_x^{8x} e^{-t} t^{\frac{1}{3}}\,dt \leq \int_x^{8x} e^{-t}(8x)^{\frac{1}{3}}\,dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq (8x)^{\frac{1}{3}} \int_{x}^{8x} e^{-t}\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} [-e^{-t}]_{x}^{8x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} (-e^{-8x} + e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} e^{-x} (1 - e^{-7x})$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x \geq 0)\ ;\ 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})}$$

■ (III) 2 ب

ننطلق من التأطير : $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0 \qquad (Evidente)$

و لدينا حسب جدول تغيرات f $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) = 2 \times 0 \times (1 - 0) = 0$

و بالتالي :

$$\underbrace{0}_{\xrightarrow{+\infty} 0} \leq \underbrace{F(x)}_{\xrightarrow{+\infty} 0} \leq \underbrace{2f(x)(1 - e^{-7x})}_{\xrightarrow{+\infty} 0}$$

أي : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0}$

■ (III) 2 ج

نلخص النتائج التي تم التوصل إليها بخصوص الدالة F في الجدول التالي :

x	0		$\frac{ln16}{7}$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$F\left(\frac{ln16}{7}\right)$	$\searrow$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■