



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول: (4,5 ن) نذكر أن: $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.

(I) لتكن G مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل:

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}; (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

① بين أن G جزء مستقر من: $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ ن 0,25

② بين أن (G, \times) زمرة، هل هي تبادلية؟ ن 0,75

③ لتكن \mathcal{H} مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بين أن \mathcal{H} زمرة جزئية للزمرة (G, \times) . ن 0,50

④ ليكن A عنصرا من G حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ ن 0,50

نضع $A^1 = A$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

أحسب A^n بدلالة a و n بحيث: ($n \in \mathbb{N}^*$).

(II) نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي τ المعروف بما يلي:

$$(a,b) \tau (x,y) = (a + bx, by); (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

ليكن φ التطبيق المعروف من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بما يلي:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : \varphi(M_{(a,b)}) = (a,b)$$

① بين أن φ تشاكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \tau)$. ن 0,75

② استنتج بنية المجموعة: $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \tau)$. ن 0,25

③ حدد مماثل: $(a,1) \tau (a,1) \tau \dots \tau (a,1)$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \tau)$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. ن 0,50

التمرين الثاني: (2,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة: $(E) : x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

① ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

نضع $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$.

أ) تحقق أن $b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$ ن 0,25

ب) استنتج أن $b = 1$. ن 0,75

ج) بين أن $a \neq 1$ و $(a-1)$ يقسم $(a+1)$. ن 0,50

د) استنتج أن $a = 2$ أو $a = 3$. ن 0,50

② حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) . ن 0,50

التمرين الثالث : (5,0 ن)نضع $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$

(I) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر (\mathcal{H}) مجموعة النقط M ذات اللق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرفا .

① بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة (\mathcal{H}) . ن 0,50

② بين أن (\mathcal{H}) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و معادلتيه مقاربيه في $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. ن 1,00

③ تحقق أن النقطة O ، أصل المعلم ، تنتمي إلى المجموعة (\mathcal{H}) ثم أكتب في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (\mathcal{H}) في O . ن 0,50

④ أنشئ (\mathcal{H}) في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. ن 0,75

①(II) حل في \mathbb{C} المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$. ن 0,50

② نضع $u = 1 + 5i$ و $v = 1 + i$ و $\omega = 239 - i$ و $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$

أ) تحقق أن : $u^4 \times v = 4\omega$. ن 0,50

ب) حدد بدلالة α عمدة العدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة العدد العقدي ω . ن 0,75

ج) استنتج أن : $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$. ن 0,50

الجزء الأول في هذا الجزء : $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 3$.

التمرين الرابع : (9,0 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $g_n(x) = nx + 2 \ln x$

① ضع جدول تغيرات الدالة g_n . ن 0,50

② بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), \sqrt{x} > \ln x$. ن 0,50

③ أ) بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R}_+^* . و أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$. ن 0,75

ب) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$. ن 0,25

الجزء الثاني

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$

ليكن (\mathcal{E}) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) مع $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm})$.

① أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة O ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها . ن 0,50

② أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا . ن 0,50

③ أ) بين أن : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$ (*) . ن 0,25

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f . ن 0,25

④ أنشئ (\mathcal{E}) نأخذ : $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$. ن 0,50

(II) نضع : $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

① ① بين أن : $f(I) = I$ ن 0,50

② ② باستعمال العلاقة (*), بين أن : $(\forall x \in I), |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ ن 0,50

③ ③ بين أن : $[(f(x) = x \text{ و } x > 0) \Leftrightarrow x = \alpha_3]$ ن 0,50

حيث α_3 هو حل المعادلة : $g_3(x) = 0$ الذي تم تعريفه في الجزء الأول.

④ ② لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 = \frac{1}{3}$

① ① بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in I$ ن 0,25

② ② بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha_3| = \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$ ن 0,25

③ ③ استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ ن 0,25

④ ④ بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة محددًا نهايتها . ن 0,50

(III) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t) dt$

① ① بين أن : F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$. ن 0,25

② ② أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0, +\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة F . ن 0,75

③ ② بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$ ن 0,50

④ ② استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ن 0,25

⑤ ③ ضع جدول تغيرات الدالة F . ن 0,25