## التمرين الأول : ( 2,5 ن )

■ ① (أ)

ليكن $(x,y)$ حلا للمعادلة $(E)$ .

هذا يعني أن : $(x+1)^2 = 9+5y$

و منه : $5/(x+1)^2-9$ أي : $5/(x+4)\,(x-2)$

و بما أن 5 عدد أولي :

فإن : $5/(x-2)$ أو $5/(x+4)$

و منه : $5/(x-2)$ أو $5/(x+4)-5$

يعني : $x\equiv 2[5]$ أو $x\equiv 1[5]$

■ ① (ب)

إذا كان : $x\equiv 1[5]$ فإن : $5/(x-1)$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x-1=5k$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x=5k+1$

و منه حسب المعادلة $(E)$ : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ (5k+1+1)^2=9+5y$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ 25k^2+4+20k=9+5y$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=5k^2+4k-1$

إذا كان $x\equiv 2[5]$ فإن $5/(x-2)$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x-2=5k$

أي : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x=5k+2$

و منه حسب المعادلة $(E)$ : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ (5k+3)^2=9+5y$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ 25k^2+9+30k=9+5y$

إذن : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=5k^2+6k$

و بالتالي : $\mathcal{S}$ مجموعة حلول المعادلة $(E)$ تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S}=\{\,(5k+1\,;5k^2+4k-1)\,;(5k+2\,;5k^2+6k)\ /\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

■ ②

أذَكِّرُ في البداية بمبدأ خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \Longrightarrow\ a\wedge b=b\wedge c$$

لدينا :

$$\begin{array}{r|l} 5k^2+4k-1 & 5k+1 \\ \hline 3k-1 & k \end{array}$$

إذن :

$$\boxed{(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(5k+1)\wedge(3k-1)}\ (1)$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{r|l} 5k+1 & 3k-1 \\ \hline 2k+2 & 1 \end{array}$$

إذن : $(2)\ \boxed{(5k+1)\wedge(3k-1)=(3k-1)\wedge(2k+2)}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{r|l} 3k-1 & 2k+2 \\ \hline k-3 & 1 \end{array}$$

إذن : $(3)\ \boxed{(3k-1)\wedge(2k+2)=(2k+2)\wedge(k-3)}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{r|l} 2k+2 & k-3 \\ \hline 8 & 2 \end{array}$$

إذن : $(4)\ \boxed{(2k+2)\wedge(k-3)=(k-3)\wedge 8}$

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(k-3)\wedge 8}$$

■ ③

لنحل النظمة التالية :

$$\begin{cases}121^{\overline{(x)}}=59^{\overline{(y)}}\\ x\wedge y=8\\ x\equiv 1[5]\end{cases}\iff\begin{cases}(x+1)^2=9+5y\\ x\wedge y=8\\ x\equiv 1[5]\end{cases}$$

نستنتج من هذه الكتابة الأخيرة أن $(x,y)$ حل للمعادلة $(E)$ و $x\equiv 1[5]$

إذن حسب نتيجة السؤال (ب) :

$$y=5k^2+4k-1 \quad \text{و} \quad x=5k+1$$

بما أن : $x\wedge y=8$ فإن : $(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=8$

و منه حسب السؤال ② : $(k-3)\wedge 8=8$

إذن : 8 تقسم العدد $(k-3)$ .

$$\Longrightarrow\ (\exists n\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ k-3=8n$$

$$\Longrightarrow\ (\exists n\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ k=8n+3$$

و بالتالي :

$$\begin{cases}x=(5k+1)=40n+16\\ y=5k^2+4k-1=320n^2+272n+56\end{cases}$$

و بالتالي مجموعة حلول النظمة هي :

$$\boxed{\mathcal{S}'=\{\,(40n+16\ \ ;\ \ 320n^2+272n+56)\ /\ \ n\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

## التمرين الثاني : ( 4,5 ن )

■ (I) ①

إذا كان : $2-m>0$ و $10-m>0$

يعني : $m<2$ و $m<10$

فإن : $(\mathscr{C}_m)\ :\ \dfrac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2}=1$

و منه : $(\mathscr{C}_m)$ إهليلج.

إذا كان : $2<m<10$

فإن : $10-m>0$ و $m-2>0$

و منه : $(\mathscr{C}_m)\ :\ \dfrac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}=1$

إذن : $(\mathscr{C}_m)$ هذلول.

إذا كان : $m > 10$ فإن : $m - 2 > 0$ و $10 - m < 0$

و منه : $(\mathscr{C}_m) : -\left(\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{m-10}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}\right) = 1$

نلاحظ أن الكمية $\left(\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{m-10}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}\right)$ موجبة إذن : $(\mathscr{C}_m) = \emptyset$

■ (I) ②

**في الحالة $m < 2$ يعني : $m < 10$**

لدينا : $(\mathscr{C}_m) : \left(\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2-m}\right)^2}\right) = 1$

و منه : $(\mathscr{C}_m)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$

و رؤوسه : $A\left(\sqrt{10-m}, 0\right)$ و $B\left(-\sqrt{10-m}, 0\right)$

و $A'\left(0, \sqrt{2-m}\right)$ و $A\left(0, -\sqrt{2-m}\right)$

نضع : $a = \sqrt{10-m}$ و $b = \sqrt{2-m}$

لدينا : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(2-m) - (10-m)} = 2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الإهليلج $(\mathscr{C}_m)$ هما : $F\left(2\sqrt{2}, 0\right)$ و $F'\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$

**في الحالة : $2 < m < 10$**

لدينا : $(\mathscr{C}_m) : \left(\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}\right) = 1$

و منه : $(\mathscr{C}_m)$ هذلول مركزه $O(0,0)$

و رأساه هما : $A\left(\sqrt{10-m}, 0\right)$ و $A'\left(-\sqrt{10-m}, 0\right)$

نضع : $a = \sqrt{10-m}$ و $b = \sqrt{m-2}$

لدينا : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(m-2) + (10-m)} = 2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الهذلول $(\mathscr{C}_m)$ هما : $F\left(\sqrt{8}, 0\right)$ و $F'\left(-\sqrt{8}, 0\right)$

و لدينا كذلك : $(\mathscr{C}_m)$ يقبل مقاربين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ معرفين بما يلي :

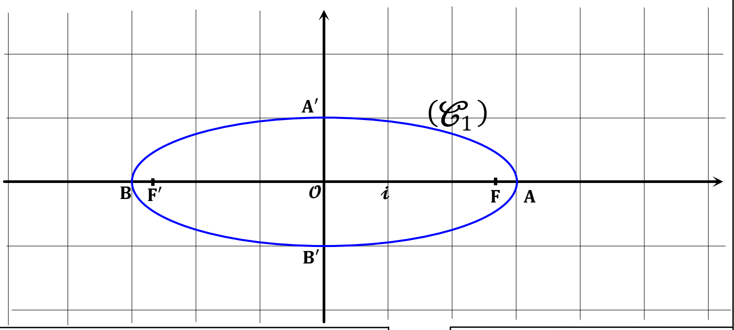
$$\begin{cases} (\Delta) : y = \left(\sqrt{\dfrac{m-2}{10-m}}\right) x \\ (\Delta') : y = -\left(\sqrt{\dfrac{m-2}{10-m}}\right) x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Delta) : y = \dfrac{b}{a} x \\ (\Delta') : y = -\dfrac{b}{a} x \end{cases}$$

■ (I) ③

لدينا حسب ما سبق $(\mathscr{C}_1)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$

و رؤوسه : $A(3,0)$ و $B(-3,0)$ و $A'(0,1)$ و $B'(0,-1)$

و بؤرتاه هما : $F\left(\sqrt{8}, 0\right)$ و $F'\left(-\sqrt{8}, 0\right)$




■ (II) ①

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) \ ; \ z^2 - (6cos\alpha)z + (1 + 8cos^2\alpha) = 0$$

لدينا : $\Delta = (6cos\alpha)^2 - 4(1 + 8cos^2\alpha) = (2i\,sin\alpha)^2$

و منه $(E)$ تقبل حلين عقديين مترافقين $z_1$ و $z_2$ معرفين كما يلي :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{6\cos\alpha + 2i\sin\alpha}{2} = 3\cos\alpha + i\sin\alpha \\ z_2 = \dfrac{6\,cos\,\alpha - 2i\,sin\,\alpha}{2} = 3\,cos\,\alpha - i\,sin\,\alpha \end{cases}$$

■ (II) ② أ

نضع : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

نعلم أن : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ و منه : $\dfrac{9\cos^2\alpha}{9} + \dfrac{\sin^2\alpha}{1} = 1$

أي : $\dfrac{(3\cos\alpha)^2}{3^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{1} = 1$

إذن الزوج $(3\cos\alpha\ ; \sin\alpha)$ يحقق معادلة الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$

و منه : $M_1 \in (\mathscr{C}_1)$

■ (II) ② ب

لتكن $P(x_0; y_0)$ نقطة من الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$

المعادلة الديكارتية لـ (T) مماس الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$ في $P$ هي :

$$(T) \ : \ \frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (T) \ : \ y = \left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)x + 1$$

لدينا : $M_1$ هي صورة $z_1$ إذن : $M_1(3\cos\alpha\,; \sin\alpha)$

و منه المعادلة الديكارتية المختصرة لـ $(OM_1)$ تكتب على شكل :

$$(OM_1) \ : \ y = \left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)x$$

ننطلق من الكتابة : $(OM_1) \parallel (T)$

هذا يعني أن لهما نفس الميل أي : $\left(\dfrac{-x_0}{9y_0}\right) = \left(\dfrac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)$

و منه : $\boxed{x_0 = -3y_0 \cdot \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$ $(*)$

و بما أن : $P(x_0; y_0) \in (\mathscr{C}_1)$ .

فإن : $\dfrac{x_0^2}{3^2} + \dfrac{y_0^2}{1^2} = 1$

نعوض $x_0$ بقيمته حسب $(*)$ في آخر تعبير حصلنا عليه نجد :

$$\frac{1}{9}\left(-3y_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+y_0^2=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2=\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0=\pm\cos\alpha$$

إذا كان $y_0=\cos\alpha$ فإن : $x_0=-3y_0\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=-3\sin\alpha$

إذا كان $y_0=-\cos\alpha$ فإن : $x_0=-3y_0\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=3\sin\alpha$

و بالتالي : توجد نقطتان $\begin{cases}P_1(3\sin\alpha\ ;\ -\cos\alpha)\\ P_2(-3\sin\alpha\ ;\ \cos\alpha)\end{cases}$

من الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$ : حيث المماس لـ $(\mathscr{C}_1)$ في كل منهما يوازي $(OM_1)$

■ (II) ② ج

لدينا : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ و $P_1(3sin\alpha-icos\alpha)$
و $P_2(-3sin\alpha+icos\alpha)$

و منه : $OM_1^2+OP_1^2=|z_1|^2+|3sin\alpha-icos\alpha|^2$

$$=(9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$=9(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$=\boxed{10}$$

و بنفس الطريقة لدينا :

$$OM_2^2+OP_2^2=|z_2|^2+|-3sin\alpha+icos\alpha|^2$$
$$=(9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$=9(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$=\boxed{10}$$

و بالتالي : $\boxed{OM_1^2+OP_1^2=OM_2^2+OP_2^2}$

## التمرين الثالث : ( 2,5 ن )

■ ①

**تذكير** : ليكن $p$ احتمال وقوع حدث $A$ في تجربة عشوائية $E$ .

عند إعادة التجربة $E$ $n$ مرة متتالية فإن احتمال الحصول على الحدث $A$ بالضبط $k$ مرة هو : $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

في هذا التمرين : الحدث $A$ هو الحصول على كرة بيضاء.

و لدينا : $p(A)=\frac{10}{n}$

نكرر التجربة $n$ مرة.

إذن احتمال الحصول على الحدث $A$ $k$ مرة هو احتمال الحصول على $k$ كرة بيضاء و يساوي : $p_k=C_n^k\big(p(A)\big)^k\big(1-p(A)\big)^{n-k}$

إذن : $p_k=C_n^k\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$

يمكن ترك هذه النتيجة على ما هي عليه و نكون بذلك قد أجبنا على السؤال باقتصاد تام . و يمكن إضافة بعض المراحل إن كنت من هواة الحساب الحرفي لكي تصل إلى النتيجة التالية :

$$p_k=C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n$$

■ ② أ

نضع : $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$

لدينا :

$$u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{C_n^{k+1}\left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1}\left(\frac{n-10}{n}\right)^n}{C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n}$$

و لدينا :

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\times\frac{k!\,(n-k)!}{n!}=\left(\frac{n-k}{k+1}\right)$$

و منه : $u_k=\left(\frac{n-k}{k+1}\right)\times\left(\frac{10}{n-10}\right)$

■ ② ب

نفترض أن : $u_k\geq1$

لدينا حسب المعطيات $k\geq0$

يكفي إذن أن نبرهن على أن : $k\leq9$

لدينا : $u_k\geq1$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\frac{n-k}{k+1}\right)\times\left(\frac{10}{n-10}\right)\geq1$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)}\geq1$$

بما أن : $n\geq k$ فإن : $n-k\geq0$

و منه العددان : $10(n-k)$ و $(n-10)(k+1)$ موجبان.

$$\Leftrightarrow\ 10(n-k)\ \geq (n-10)(k+1)$$

$$\Leftrightarrow\ 10n-10k\ \geq nk+n-10k-10$$

$$\Leftrightarrow\ 10n-n+\ 10 \geq k(n-10+10)$$

$$\Leftrightarrow\ k \leq \frac{9n+10}{n}$$

$$\Leftrightarrow\ k \leq 9+\frac{10}{n}$$

$$\Leftrightarrow\ k \leq 9$$

و بالتالي : $0 \leq k \leq 9$

**الشطر الثاني من السؤال :**

ننطلق من : $10 \leq k \leq (n-1)$

يعني : $\boxed{10 \leq 10(n-k) \leq 10(n-10)}$ $(1)$

و لدينا كذلك : $10 \leq k \leq (n-1)$

يعني : $11(n-10) \leq (n-10)(K+1) \leq 10(n-1)$

و منه : $\boxed{\dfrac{1}{n(n-10)} \leq \dfrac{1}{(n-10)(k+1)} \leq \dfrac{1}{11(n-10)}}$ $(2)$

نضرب التأطيرين $(1)$ و $(2)$ طرفا بطرف نحصل على :

$$\frac{10}{n(n-10)} \leq \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10(n-10)}{11(n-10)}$$

و منه : $\dfrac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \dfrac{10}{11}$

أي : $\boxed{u_k \leq 1}$

■ 2 ج

لدينا من أجل : $0 \leq k \leq 9$ : $u_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$

يعني : $p_{k+1} \geq p_k$

و منه المتتالية $(p_k)_k$ تزايدية .

و لدينا كذلك : من أجل : $10 \leq k \leq n-1$ : $u_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1$

يعني : $p_{k+1} \leq p_k$

و منه المتتالية $(p_k)_k$ تناقصية.

نستنتج أن أكبر قيمة لهذه المتتالية هي : $p_{10}$

إذن : $M = p_{10} = C_n^{10}\left(\dfrac{10}{n-10}\right)^{10}\left(\dfrac{n-10}{n}\right)^n$

$$\Leftrightarrow\ M = \frac{n! \times 10^{10} \times (n-10)^n}{10!\,(n-10)! \times (n-10)^n \times n^n}$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^n}{(n-10)!}}$$

**التمرين الرابع : ( 10,5 ن )**

■ (I) 1 أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m\to-\infty \\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m\to+\infty \\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right) = \boxed{0}$$

■ (I) 1 ب

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ حسب السؤال أ

إذن : $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاصيل

و لدينا كذلك حسب السؤال أ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-2x} = 0$

و : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-2x} = +\infty$

إذن : $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب

■ (I) 2

لدينا : $f(x) = (1+x)e^{-2x}$

إذن $f$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و منه : $f'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow\ f'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow\ f'(x) = -e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^{-2x} > 0$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1+2x)$ .

لدينا : $f\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)} = \dfrac{e}{2}$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات $f$ كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{e}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

■ (I)③(أ)

لدينا : $f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$

إذن : $f''(x) = -2e^{-2x} + 2(1+2x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) = 4xe^{-2x}$$

إذا كان : $x = 0$ فإن : $f''(x) = 0$

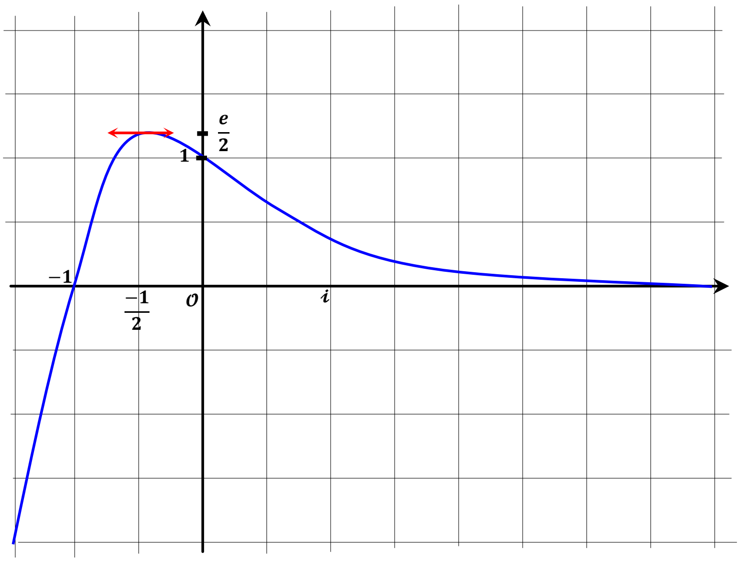
إذا كان : $x > 0$ فإن : $f''(x) > 0$

إذا كان : $x < 0$ فإن : $f''(x) < 0$

نستنتج إذن الجدول التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(\mathscr{C})$ | | $(\mathscr{C})$ مُقَعَّر | $\Omega(0,1)$ نقطة انعطاف | $(\mathscr{C})$ مُحَدَّب | |

■ (I)③(ب)




■ (I)④(أ)

لدينا : $\begin{cases} f(x) = (1+x)e^{-2x} \\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x} \\ f''(x) = 4xe^{-2x} \end{cases}$

إذن : $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x)$

$$= 4xe^{-2x} - 3(1+2x)e^{-2x} + 2(1+x)e^{-2x}$$
$$= (4x - 3 - 6x + 2 + 2x)e^{-2x}$$
$$= -e^{-2x}$$

إذن $f$ حل خاص للمعادلة التفاضلية : $(E)$

$$\boxed{(E) : \; y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}}$$

■ (I)④(ب)

الحل العام للمعادلة $(E)$ يكتب على شكل : $y = y_H + y_p$

بحيث $y_p$ هو حل خاص للمعادلة $(E)$ ( نأخذه يساوي $f$ )

و $y_H$ هو حل المعادلة التفاضلية : $(E_H) \; ; \; y'' + 3y' + 2y = 0$

و لحلها نحل أولا معادلتها المميزة : $r^2 + 3r + 2 = 0$

و التي تقبل حلين حقيقيين $r_1 = -1$ و $r_2 = -2$ و ذلك بعد حساب المميز $\Delta = 1$

إذن : $y_H = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} \quad / \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

و بالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E)$ يكتب على الشكل :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + f(x)$$

بحيث : $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين .

■ (II)①

يشير التكامل هندسيا إلى قياس طول أو مساحة أو حجم

إذن : $A_n = \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n (1+x)e^{-2x}\,dx$

نضع $u(x) = 1 + x$ و منه : $u'(x) = 1$

ثم نضع $v'(x) = e^{-2x}$ و منه : $v(x) = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

باستعمال مكاملة بالأجزاء نحصل على : $A_n = [uv] - \int u'v$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2}\right]_0^n + \frac{1}{2}\int_0^n e^{-2x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2}\right]_0^n + \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^n$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left(\frac{-(1+n)e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = e^{-2n}\left(\frac{-(1+n)}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = e^{-2n}\left(\frac{-3-2n}{4}\right) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \frac{-e^{-2n}}{4}(2n+3) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A_n = \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4}}$$

■ (II) ②

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}(2n+3)e^{-2n} = \lim_{\substack{m\to+\infty \\ m=2n+3}} e^3 \times \dfrac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} = 0$

و منه : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3-(2n+3)e^{-2n}}{4} = \dfrac{3}{4}$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{3}{4}}$

■ (III) ①

نضع : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n = n\int_0^1 [f(x)]^n\,dx$

ثم نضع : $t = nx$ و منه : $dt = ndx$

إذا كان $x = 0$ فإن $t = 0$

إذا كان $x = 1$ فإن $t = n$

و بالتالي : $u_n = n\int_0^n \left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \dfrac{dt}{n}$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{n}{n}\int_0^n \left(\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{\frac{-2t}{n}}\right)^n dt$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt$$

■ (III) ② أ

ليكن : $u\,\epsilon\,[1,2]$ يعني : $1 \le u \le 2$

و منه : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{u} \le 1$ إذن : $\boxed{\frac{1}{u} \le 1}$ (1)

و نعلم أن : $(\forall\, u\,\epsilon\,[1,2])\ ;\ (u-1)^2 \ge 0$

إذن : $u^2 - 2u + 1 \ge 0$

و منه : $u^2 + 1 \ge 2u$

نضرب الطرفين في العدد الموجب الغير المنعدم $\frac{1}{u}$ نحصل على :

$$\frac{u^2+1}{u} \ge 2$$

و منه : $u + \frac{1}{u} \ge 2$ أي : $\boxed{\frac{1}{u} \ge 2-u}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall u \epsilon [1,2])\ ;\ 2-u \le \frac{1}{u} \le 1$

■ (III) ② ب

ليكن $x\epsilon[0,n]$ و $n\epsilon\mathbb{N}^*$

يعني : $0 \le x \le n$ و منه : $0 \le \frac{x}{n} \le 1$

نضع : $t = \frac{x}{n}$ إذن : $0 \le t \le 1$

أي : $1 \le t+1 \le 2$

إذن حسب السؤال ② أ

$$2-(t+1) \le \frac{1}{t+1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-t \le \frac{1}{t+1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \int(1-t)\,dt \le \int\left(\frac{1}{t+1}\right)dt \le \int 1\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad t - \frac{t^2}{2} \le \ln(1+t) \le t$$

نعوض $t$ بالقيمة $\frac{x}{n}$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \le \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{n}$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب الغير المنعدم $n$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x - \frac{x^2}{2n} \le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x}$$

■ (III) ③ أ

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال ② ب

$$(\forall x\epsilon[0,n])\ ,(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x$$

و منه : $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le x$

و منه : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le e^x$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $e^{-2x}$ نجد :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \le e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx \le \int_0^n e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_n \le \int_0^n e^{-x}\,dx} \quad (*)$$

■ (III) ③ ب

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال ② ب

$$x - \frac{x^2}{2n} \le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{x^2}{2n} \le \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\left(x-\frac{x^2}{2n}\right)} \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\left(x-\frac{x^2}{2n}\right)} e^{-2x} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \leq \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \leq u_n} \quad (1)$$

و لدينا : $1 \leq n$ إذن : $1 \leq n^2$

و منه : $n \leq n^3$ إذن : $n^{\frac{1}{3}} \leq n$

يعني أن : $$(2) \quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \leq \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx}$$

ليكن : $0 \leq x \leq n^{\frac{1}{3}}$ إذن : $x^2 \leq n^{\frac{2}{3}}$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \leq \frac{2n}{2n^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2n}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{-x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad -x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}} \leq -x-\frac{x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \leq e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \leq \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx} \quad (3)$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \leq \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \leq \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)} \leq u_n$$

إذن : $$\boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \leq u_n} \quad (**)$$

## ■(III)③ ج

من $(*)$ و $(**)$ و نستنتج أن :

$$(***) \quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \leq u_n \leq \int_0^n e^{-x}\,dx}$$

و لدينا : $\int_0^n e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^n = -e^{-n}+1$

و $$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx = e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}[-e^{-x}]_0^{n^{\frac{1}{3}}} = e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\left(-e^{-n^{\frac{1}{3}}}+1\right)$$

و بالتالي : $$\boxed{\left(1-e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right)e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \leq u_n \leq (1-e^{-n})}$$

نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\underbrace{\left(1-e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right)e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}}_{\xrightarrow{n\infty}\ \boxed{1}} \leq u_n \leq \underbrace{(1-e^{-n})}_{\xrightarrow{n\infty}\ \boxed{1}}$$

و بالتالي : $(u_n)_n$ متتالية متقاربة و تؤول إلى 1 .

## ■(III)④ أ

ليكن : $0 < a < 1$ و $a \leq x \leq 1$

لدينا $f$ دالة تناقصية على المجال $[0,+\infty[$ .

إذن : $f(1) \leq f(x) \leq f(a)$

$$\Leftrightarrow \quad 2e^{-2} \leq f(x) \leq f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < 2e^{-2} \leq f(x) \leq f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq n(f(x))^n \leq n(f(a))^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \leq \int_a^1 n(f(a))^n\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \leq n(1-a)(f(a))^n} \quad (\ddagger)$$

■(III)④ⓑ

لدينا : $0 < a < 1$ إذن : $f(1) < f(a) < f(0)$

أي : $2e^{-2} < f(a) < 1$ و منه : $\ln(f(a)) < \ln 1$

يعني : $\ln(f(a)) < 0$

و لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-a)(f(a))^n = \lim_{n\infty} n(1-a)e^{n\ln(f(a))}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\,ln(f(a))\,e^{n\ln(f(a))}\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right)$$

$$= \lim_{\substack{m\to-\infty \\ m=n\,ln(f(a))}} (me^m)\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right)$$

$$= 0\times\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right) = \boxed{0}$$

إذن حسب التأطير (♯)

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{0}_{\xrightarrow{n\infty}\ \boxed{0}} \le \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \le \underbrace{n(1-a)(f(a))^n}_{\xrightarrow{n\infty}\ \boxed{0}}$$

و بالتالي : $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^1 n(f(x))^n\,dx\right) = 0}$$

■(III)④ⓙ

لدينا حسب نتيجة السؤال ③ⓙ $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

يعني : $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 n(f(x))^n\,dx\right) = 1$$

و منه : $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n\,dx + \int_a^1 n(f(x))^n\,dx\right) = 1$$

لدينا حسب نتيجة السؤال ④ⓑ $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^1 n(f(x))^n\,dx\right) = 0$$

إذن :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n\,dx\right) = 1 \quad ; \quad (\forall a\in]0,1[)}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■