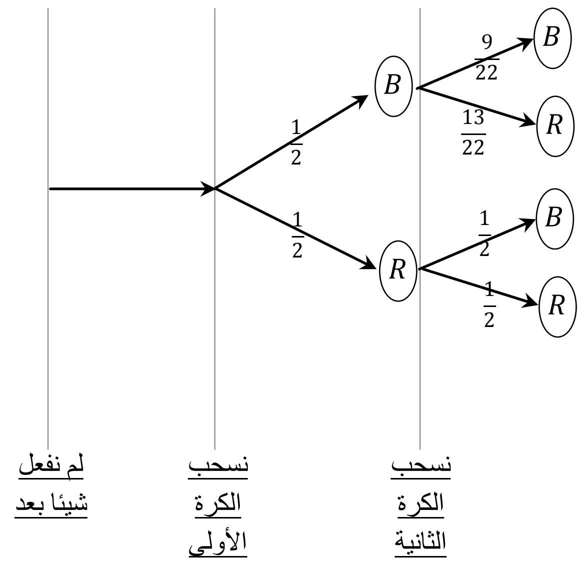
التمرين الأول : (2,5 ن)

■ 1

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو شجرة الاحتمالات .

من معطيات التجربة العشوائية نستنتج شجرة الإحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة : $P(R\cap R)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

■ 2

لدينا حسب الشجرة : $P(B\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{22}=\frac{9}{44}$

■ 3

لدينا حسب الشجرة :

$$P(\text{لونين مختلفين})=P(B\cap R)+P(R\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{13}{22}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{6}{11}$$

■ 4

نستعمل الاحتمال الشرطي التالي :

$$p_{B_2}(B_1)=\frac{p(B_1\cap B_2)}{p(B_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{9}{22}}{\frac{1}{2}\times\frac{9}{22}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

التمرين الثاني : (3,0 ن)

■ 1

نلاحظ في البداية أن $(1,1)$ حل خاص للمعادلة (E)

لأن : $\boxed{3\times1-2\times1=1}$ $(*)$

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $\boxed{3x-2y=1}$ $(**)$

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين $(*)$ و $(**)$ نحصل على :

$$3(x-1)-2(y-1)=0$$

و منه : $\boxed{3(x-1)=2(y-1)}$ $\otimes$ إذن : $3\,/\,2(y-1)$

و بما أن : $3\wedge2=1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $3\,/\,(y-1)$

إذن : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=3k+1$

نعوض y بقيمته في المتساوية $\otimes$ نحصل على : $3(x-1)=2(3k)$

يعني : $x=2k+1$

عكسيا : لدينا $3(2k+1)-2(3k+1)=1$

و بالتالي :مجموعة حلول المعادلة تكتب على الشكل :

$$\boxed{\mathcal{S}=\{(2k+1\,;3k+1)\quad/\quad k\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

■ 2 أ

لدينا :

$$3(14n+3)-2(21n+4)=42n+9-42n-8=1$$

إذن $(14n+3\,;21n+4)$ حل للمعادلة (E) .

■ 2 ب

بما أن : $3(14n+3)-2(21n+4)=1$

فإنه حسب $(Bezout)$: $(14n+3)\wedge(21n+4)=1$

■ 3 أ

ليكن $(21n+4)\wedge(2n+1)=d$

باستعمال خوارزمية إقليدس نحصل على :

$(21n+4)$	$(2n+1)$
$(n-6)$	10

$(2n+1)$	$(n-6)$
13	2

من هاتين الإقليديتين نستنتج أن :

$$(21n+4)\wedge(2n+1)=(2n+1)\wedge(n-6)$$
$$=(n-6)\wedge13$$

إذن : $\boxed{d = (n-6)\wedge 13}$ $(\star)$

و منه : $d / 13$

و نعلم أن 13 عدد أولي إذن : $d = 13$ أو $d = 1$

■ 3 ب

إذا كان $d = 13$ فإنه حسب $(\star)$: $d / (n-6)$

(لأن d قاسم مشترك لـ 13 و $(n-6)$)

أي : $13 / (n-6)$ و منه : $n \equiv 6[13]$

■ 4 أ

نضع : $A = P(n) = 21n^2 - 17n - 4$

و : $B = Q(n) = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

لدينا : $P(1) = Q(1) = 0$

إذن : 1 جذر للحدوديتين $P(n)$ و $Q(n)$ في $\mathbb{Z}$.

و منه : $P(n)$ و $Q(n)$ تقبلان القسمة على : $(n-1)$

■ 4 ب

بالاستعانة بالقسمة الأقليدية نحصل على :

$$A = (n-1)(21n+4)$$

$$B = (n-1)(28n^2 + 20n + 3)$$

بعد تعميل ثلاثية الحدود $(28n^2 + 20n + 3)$ نحصل على :

$$B = (n-1)(2n+1)(14n+3)$$

تذكير بخاصية مهمة :

$$\boxed{c \wedge a = 1 \implies (\forall b \in \mathbb{Z}) \; ; \; a \wedge b = a \wedge (bc)}$$

ليكن : $(21n+4)\wedge(2n+1)(14n+3) = d$

لدينا حسب السؤال 2 ب $(14n+3)\wedge(21n+4) = 1$

إذن حسب الخاصية المذكورة :

$$(21n+4)\wedge(2n+1) = (21n+4)\wedge(2n+1)(14n+3)$$

و منه : $(21n+4)\wedge(2n+1) = d$

إذن حسب السؤال 3 أ $d = 13$ أو $d = 1$

الحالة الأولى : إذا كان $d = 13$.

إذن حسب السؤال 3 ب : $n \equiv 6[13]$

و لدينا : $(21n+4)\wedge(2n+1)(14n+3) = 13$

يعني :

$$\boxed{(n-1)(21n+4)\wedge(n-1)(2n+1)(14n+3) = 13(n-1)}$$

و منه : $\boxed{A \wedge B = 13(n-1)}$

الحالة الثانية : إذا كان $d = 1$ فإن : $n \not\equiv 6[13]$

و لدينا : $(21n+4)\wedge(2n+1)(14n+3) = 1$

يعني : ....

$$(n-1)(21n+4)\wedge(n-1)(2n+1)(14n+3) = (n-1)$$

و منه : $A \wedge B = (n-1)$

خلاصة :

$$\boxed{(\forall n \geq 2) \; ; \; A \wedge B = \begin{cases} 13(n-1) \; ; & si \quad n \equiv 6[13] \\ (n-1) \; ; & si \quad n \not\equiv 6[13] \end{cases}}$$

التمرين الثالث : (4,0 ن)

■ 1 أ

نضع : $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة : $z^2 - \bar{z}^2 = \mathbb{a}^2 - \bar{\mathbb{a}}^2$

$$\iff (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (\mathbb{a} - \bar{\mathbb{a}})(\mathbb{a} + \bar{\mathbb{a}})$$

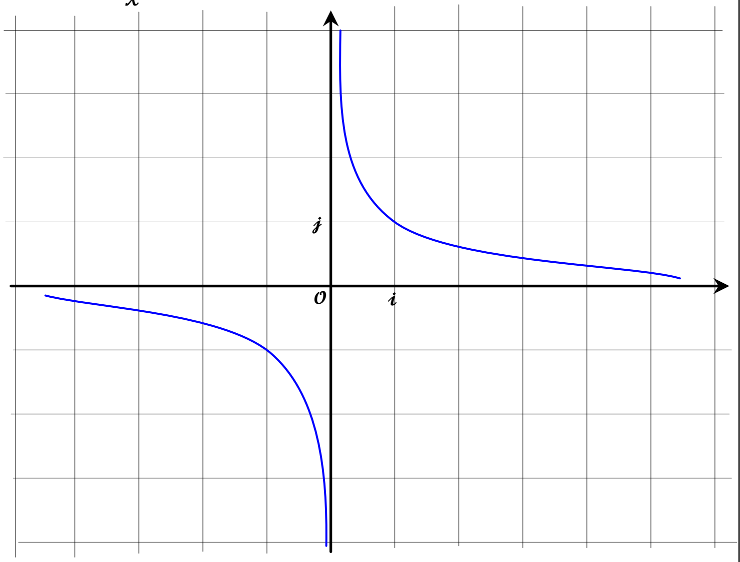
$$\iff (2iy)(2x) = (2i\beta)(2\alpha)$$

$$\iff xy = \alpha\beta$$

و منه المجموعة $(\mathcal{H})$ هذلول معادلته : $y = \dfrac{\alpha\beta}{x}$

■ 1 ب

في حالة $\mathbb{a} = (1+i)$ لدينا $(\mathcal{H})$ هذلول معادلته : $y = \dfrac{1}{x}$



■ ② أ

ليكن : $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة : $(z-\mathbb{a})(\bar{z}-\bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}$

$$\Leftrightarrow \quad z\bar{z} - (z\bar{\mathbb{a}} + \mathbb{a}\bar{z}) + \mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+y^2) - (2\alpha x + 2\beta y) + \alpha^2 + \beta^2 = (2|\mathbb{a}|)^2$$

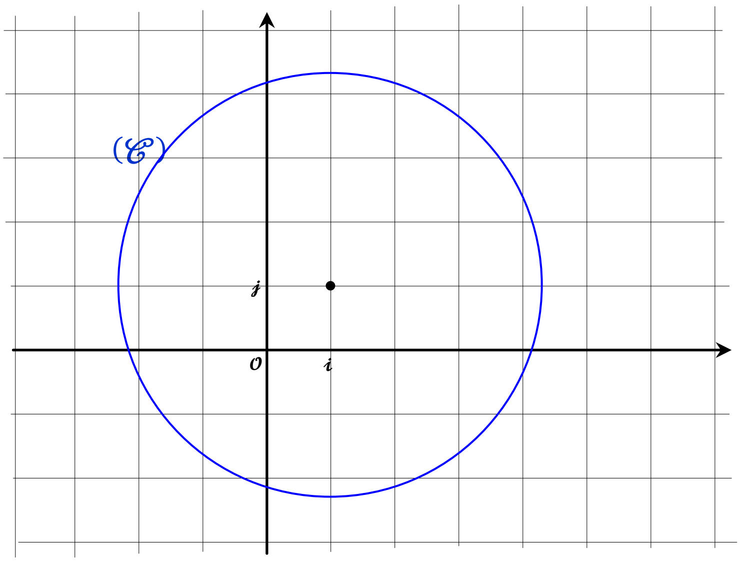
$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) = (2|\mathbb{a}|)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (2|\mathbb{a}|)^2$$

إذن : $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها النقطة $C(\alpha,\beta)$ و شعاعها $r = 2|\mathbb{a}|$

■ ② أ

في حالة $\mathbb{a} = (1+i)$ لدينا $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها $C(1,1)$ و شعاعها $2\sqrt{2}$



■ ③ أ

لدينا : $u = z - \mathbb{a}$ إذن : $\bar{u} = \bar{z} - \bar{\mathbb{a}}$

ننطلق من الكتابة : $\begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = \mathbb{a}^2 - \bar{\mathbb{a}}^2 \\ (z-\mathbb{a})(\bar{z}-\bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z^2 - \mathbb{a}^2 = \bar{z}^2 - \bar{\mathbb{a}}^2 \\ (z-\mathbb{a})(\bar{z}-\bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (z-\mathbb{a})(z+\mathbb{a}) = (\bar{z}-\bar{\mathbb{a}})(\bar{z}+\bar{\mathbb{a}}) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u+2\mathbb{a}) = \bar{u}(\bar{u}+2\bar{\mathbb{a}}) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

لدينا حسب المعادلة الثانية : $\bar{u} = \dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}$

نعوض $\bar{u}$ بقيمته في المعادلة الأولى نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u+2\mathbb{a}) = \dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u} + 2\bar{\mathbb{a}}\right) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u^2 + 2\mathbb{a}u - \left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\right)^2 - 2\bar{\mathbb{a}}\left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\right) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u^4 + 2\mathbb{a}u^3 - 16\mathbb{a}^2\bar{\mathbb{a}}^2 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2 u = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (u^4 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2 u) + (2\mathbb{a}u^3 - 16\mathbb{a}^2\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) + 2\mathbb{a}(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathcal{S}') \quad \begin{cases} (u+2\mathbb{a})(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

■ ③ ب

لنحل النظمة $(\mathcal{S}')$ بحيث : $\mathbb{a} = re^{i\theta}$

لدينا حسب المعادلة الثانية من النظمة $(\mathcal{S}')$:

$$(u+2\mathbb{a})(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (u+2\mathbb{a}) = 0 \quad \text{أو} \quad (u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u = -2re^{i\theta} \quad \text{أو} \quad u^3 = 8r^3e^{i\theta}$$

حلول المعادلة : $u^3 = 8\mathrm{r}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ هي الجذور النونية من الدرجة الثالثة للعدد العقدي $8r^3e^{-i\theta}$ و التي تكتب بصفة عامة على شكل : $u_k = \left[\sqrt[3]{8r^3}\ ,\ \dfrac{-\theta}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}\right]$. مع $k\{0,1,2\}$

و لدينا : $u_0 = \left[2r\ ;\ \dfrac{-\theta}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3}}$

$$u_1 = \left[2r\ ;\ \frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}}$$

$$u_2 = \left[2r\ ;\ \frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}}$$

إذن حلول النظمة هي : $\boxed{-2re^{-i\theta}}$ $\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}}}$ $\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}}}$ $\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}}}$

و نعلم أن : $z = u + a$

إذن القيم التي يأخذها z هي :

$$\boxed{-re^{-i\theta}} \qquad \boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}} + re^{i\theta}}$$

$$\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}} + re^{i\theta}} \qquad \boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}} + re^{i\theta}}$$

■ 3 ج

نضع : $z_0(A)$ و $z_1(B)$ و $z_2(C)$

نريد أن نبرهن على أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

لدينا :

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{2r - 2rj}{2r\bar{j} - 2rj} = \frac{1-j}{\bar{j} - j} = \frac{1-j}{-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

إذن : $\left|\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right| \equiv 1$ و $arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

و منه :

$$|z_C - z_A| = |z_B - z_A| \quad \text{و} \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$$

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع (غير مباشر)

التمرين الرابع : (10ن)

الجزء الأول

■ 1 أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(4xe^{-xln2} - 2\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\left(\frac{4}{ln2}\right) \frac{1}{\left(\frac{e^{xln2}}{xln2}\right)} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{ln2}\right)\left(\frac{1}{0^-}\right) - 2 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\left(\frac{4}{ln2}\right) \frac{1}{\left(\frac{e^{xln2}}{xln2}\right)} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{ln2}\right)\left(\frac{1}{+\infty}\right) - 2 = \boxed{-2}$$

■ 1 ب

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(4e^{-xln2} - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

بما أن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

فإن : $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

■ 2 أ ب

$$f'(x) = 4(1 - xln2)e^{-xln2}$$

لدينا : $4e^{-xln2} > 0 \;;\; (\forall x \epsilon \mathbb{R})$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - xln2)$

إذا كان : $x = \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) > 0$

و لدينا : $f\left(\frac{1}{ln2}\right) = \frac{4}{eln2} - 2$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{1}{ln2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{4}{eln2} - 2$	↘ -2

■ 2 ج

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

إذن f تقابل من المجال $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$ نحو المجال $f\left(\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]\right)$

و لدينا : $f\left(\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]\right) = \left]-\infty, \frac{4}{eln2} - 2\right] \approx \left]-\infty, \frac{1}{10}\right]$

و بما أن : $0 \,\epsilon \left]-\infty, \frac{1}{10}\right]$

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا وحيدا بالتقابل f في المجال $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

و لدينا : $f(1) = 4e^{-ln2} - 2 = 0$

و $1 \,\epsilon \left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f

f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$

إذن f تقابل من $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$ نحو صورته $\left]-2,\frac{1}{10}\right]$

مع : $\frac{4}{eln2}-2 \approx \frac{1}{10}$

و بما أن : $0 \in \left]-2,\frac{1}{10}\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا بالتقابل f في المجال $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$

و لدينا : $2 \in \left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$ ولدينا : $f(2)=0$

خلاصة : العددان 1 و 2 هما الحلان الوحيدان للمعادلة $f(x)=0$

■ ③ أ

دراسة الدالة g : $g(x)=\frac{ln(2x)}{x}$

لدينا g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$

و لدينا : $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ln(2x)}{x}\right) = -\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لـ $(\mathcal{T})$

و لدينا : $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{ln(2x)}{x}\right) = 0$

إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي لـ $(\mathcal{T})$ بجوار $+\infty$

$$g'(x)=\frac{1-ln(2x)}{x^2}$$

إذا كان : $x=\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)=0$

إذا كان : $x>\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)<0$

إذا كان : $x<\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)>0$

و لدينا : $g\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{2}{e}$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

■ ③ ب

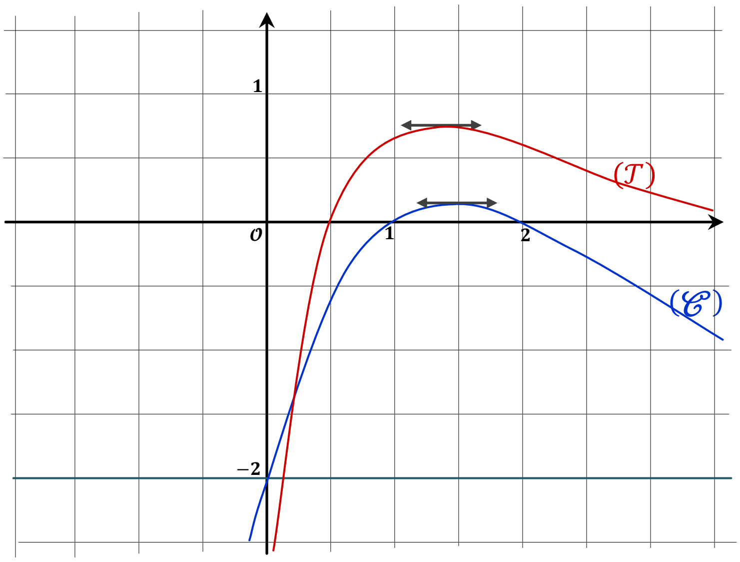
قبل رسم $(\mathcal{T})$ أضيف نقطة تقاطع $(\mathcal{T})$ مع محور الأفاصيل و التي يحقق أفصولها المعادلة $g(x)=0$

لنحل المعادلة : $g(x)=0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{ln(2x)}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad ln(2x)=ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$



الجزء الثاني

■ ① أ

لدينا : $g'\left(\frac{e}{2}\right)=0$

إذن $(\mathcal{T})$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة $\Omega\left(\frac{e}{2};\frac{2}{e}\right)$

و منه المستقيم $(\Delta): y=\frac{2}{e}$ يقطع $(\mathcal{T})$ في نقطة واحدة و هي Ω

و لدينا حسب الرسم المبياني : $(\mathcal{T})$ مقعر

إذن كل مستقيم $(D): y=k$ متواجد بين (Δ) و محور الأفاصيل يقطع $(\mathcal{T})$ في نقطتين

و بالتالي : المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلين α و β مختلفين بشرط أن يكون : $0<k<\frac{2}{e}$

بما أن : $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ و α و β مختلفين فإن أحدهما أصغر من الآخر و نضع $\frac{1}{2}<\alpha<\beta$

■ ① ب

ليكن α و β حلا المعادلة $f(x)=0$

بما أن : $\frac{1}{2}<\alpha<\beta$

فإنه حسب السؤال ② ج من الجزء الأول: $\alpha=1$ و $\beta=2$

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال ① أ من الجزء الثاني :

α و β هما حلا المعادلة $g(x)=k$

و منه : $g(1)=k$ و $g(2)=k$

أي : $ln2=k$ و $ln4=2k$

و بالتالي : $k=ln2$

■ ② أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

$$f_k'(x)=4\left(e^{-kx}-kxe^{-kx}\right)=4(1-kx)e^{-kx}$$

■ ② ب

x	$-\infty$		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{ke}-2$	$\searrow$	-2

■ ③ أ

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_k :

f_k تقابل من $\left]-\infty;\frac{1}{k}\right[$ نحو $\left]-\infty;\frac{4}{ke}-2\right[$ لأنها متصلة و تزايدية قطعا

و لدينا : $0\in\left]-\infty;\frac{4}{ke}-2\right[$

لأن :

لدينا : $0<k<\frac{2}{e}$

إذن : $\frac{1}{k}>\frac{e}{2}$

و منه : $\frac{4}{ke}>2$

أي : $\frac{4}{ke}-2>0$

إذن 0 يمتلك سابقا وحيدا a في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{k}\right[$ بالتقابل f_k

و بنفس الطريقة لدينا f_k تقابل من $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$ نحو $\left]-2;\frac{4}{ke}-2\right[$

لأنها متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$.

بما أن $0\in\left]-2;\frac{4}{ke}-2\right[$ فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا b

من المجال $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$ بالتقابل f_k

يعني : $f_k(b)=0$ و $b>\frac{1}{k}$

و بالتالي : المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين

a و b بحيث $a<\frac{1}{k}<b$

■ ③ ب

نلاحظ أن $f_{\ln 2}(x)=f(x)$

و نعلم أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين وحيدين و هما 1 و 2

إذن المعادلة $f_{\ln 2}(x)=0$ تقبل كذلك حلين وحيدين فقط و هما 1 و 2

و لدينا المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل بالضبط حلين a و b

كيفما كان $0<k<\frac{2}{e}$

إذن لدينا بالضرورة $a=1$ و $b=2$ لأن a و b وحيدين.

■ ④ أ

$$\int_0^t xe^{-kx}\,dx=\left[\frac{xe^{-kx}}{-k}\right]_0^t-\int_0^t\left(\frac{e^{-kx}}{-k}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow\int_0^t xe^{-kx}\,dx=\left[\frac{xe^{-kx}}{-k}\right]_0^t+\frac{1}{k}\left[\frac{e^{-kx}}{-k}\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow\int_0^t xe^{-kx}\,dx=\left(\frac{te^{-kt}}{-k}\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow\int_0^t xe^{-kx}\,dx=\frac{1}{k^2}\left(1-kte^{-kt}-e^{-kt}\right)$$

■ ④ ب

لدينا :
$$I_k=\int_\alpha^\beta f_k(x)dx=\int_\alpha^\beta\left(4xe^{-kx}-2\right)dx$$
$$=4\left(\int_\alpha^\beta xe^{-kx}\,dx\right)-2(\beta-\alpha)$$

لدينا : $\int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx = \int_{0}^{\beta} xe^{-kx}\,dx - \int_{0}^{\alpha} xe^{-kx}\,dx$

$$= \frac{1}{k^2}\left(1 - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta} - 1 + k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha} - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta}\right)$$

و نعلم أن : $f_k(\alpha) = 0$ و $f_k(\beta) = 0$

إذن : $4\alpha e^{-k\alpha} - 2 = 0$ و $4\beta e^{-k\beta} - 2 = 0$

و منه : $\underset{(1)}{\boxed{2\alpha = e^{\alpha k}}}$ و $\underset{(2)}{\boxed{2\beta = e^{\beta k}}}$

بالرجوع إلى التعبير الأخير للتكامل $\int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx$

نحصل على : $\int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(\frac{k\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{k\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta}\right)$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx = \frac{(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta k^2}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعبير التكامل I_k نحصل على :

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)\,dx = 4\left(\int_{\alpha}^{\beta} (xe^{-kx})\,dx\right) - 2(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{4(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta k^2} - 2(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = 2(\beta - \alpha)\left(\frac{1}{\alpha\beta k^2} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_k = \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha\beta k^2}(1 - \alpha\beta k^2)}$$

■ 4 ج

بما أن α و β عددان حقيقيان موجبان قطعا و $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإن التكامل I_k يقيس مساحة و منه I_k كمية موجبة.

إذن : $(1 - \alpha\beta k^2) \geq 0$

يعني : $\boxed{(\alpha k)(\beta k) \leq 1}$ $(\star)$

باستعمال العلاقتين (1) و (2) نستنتج منهما :

$\boxed{(\alpha k) = ln(2\alpha)}$ و $\boxed{(\beta k) = ln(2\beta)}$

و بالتالي بالرجوع إلى $(\star)$ نحصل على :

$$\boxed{ln(2\alpha) \cdot ln(2\beta) \leq 1}$$

■ 5

ليكن u و v عددان حقيقيان مختلفان و موجبان قطعا بحيث :

$$\frac{ln(u)}{u} = \frac{ln(v)}{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)}$$

نضع : $\frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} = k$

إذن العددان $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $\frac{ln(2x)}{x} = k$

أو بتعبير آخر $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $g(x) = k$

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g :

$\frac{2}{e}$ قيمة قصوية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\;;\; 0 \leq \frac{ln(2x)}{x} \leq \frac{2}{e}$

و منه : $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

لدينا إذن $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلا المعادلة : $g(x) = k$ بحيث $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

و بالتالي يمكننا تطبيق نتائج التمرين و خصوصا نتيجة السؤال 4 ج

إذن : $ln\left(2.\frac{u}{2}\right) \cdot ln\left(2.\frac{v}{2}\right) \leq 1$

و بالتالي : $\boxed{ln(u) \cdot ln(v) \leq 1}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■