

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الإمتحانات الوطنية الموحد

لنيل شهادة البكالوريا

الدورة الاستدراكية 2004

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز: أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس، نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت بيضاء نضع بدلها 3 كرات حمراء في الكيس ثم نسحب كرة من الكيس.

- ① أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين. 0,50 ن
- ② أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين. 0,50 ن
- ③ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين. 0,75 ن
- ④ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء. 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

① حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(E) : 3x - 2y = 1$. 0,75 ن

② ليكن $n \in \mathbb{N}$.

أ) بين أن : $(4 + 21n, 3 + 14n)$ حل للمعادلة (E) . 0,25 ن

ب) استنتج أن العددين $(3 + 14n)$ و $(4 + 21n)$ أوليان فيما بينهما. 0,50 ن

③ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $(2n + 1)$ و $(21n + 4)$.

أ) بين أن : $d = 1$ أو $d = 13$. 0,50 ن

ب) بين أن : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6[13]$. 0,25 ن

④ من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq 2$ نضع :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \quad \text{و} \quad B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$$

أ) بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على $(n - 1)$ في المجموعة \mathbb{Z} . 0,25 ن

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر لـ A و B . 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v})

① ليكن a عددا عقديا غير منعدم مكتوب في شكله الجبري التالي : $a = \alpha + i\beta$.

لتكن (\mathcal{H}) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2$.

① حدد طبيعة (\mathcal{H}) .

0,50 ن

② أنشئ (\mathcal{H}) في الحالة : $a = 1 + i$.

0,50 ن

② لتكن (\mathcal{E}) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$

① حدد طبيعة (\mathcal{E}) .

0,75 ن

② أنشئ (\mathcal{E}) في الحالة : $a = 1 + i$.

0,25 ن

③ نعتبر في المجموعة \mathbb{C} النظام التالية :
 $(S) : \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$

نضع : $u = z - a$

① بين أن النظام (S) تكافئ النظام :
 $(S') : \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u + 2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$

0,75 ن

② نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

0,75 ن

حدد بدلالة r و θ ألقاق نقط تقاطع (\mathcal{E}) و (\mathcal{H}) .

③ استنتج أن تقاطع (\mathcal{E}) و (\mathcal{H}) يتضمن ثلاث نقط و هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .

0,50 ن

التمرين الرابع : (10,5 ن)

① لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = 4xe^{-x \ln 2} - 2$ و $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$

و ليكن (\mathcal{E}) و (\mathcal{J}) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

① أحسب نهايتي f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

0,75 ن

② حدد الفرعين اللانهائين للمنحنى (\mathcal{E}) .

0,50 ن

② بين أن : $f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

0,75 ن

② اعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن

بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيديين للمعادلة $f(x) = 0$

③ أدرس الدالة g : الفروع اللانهائية - النهايات - التغيرات .

0,75 ن

④ ارسم (\mathcal{E}) و (\mathcal{J}) في نفس المعلم . $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm)$

0,50 ن

تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب نأخذ : $\frac{1}{\ln 2} \approx 1,4$ و $\frac{1}{e} \approx 0,4$ و $e \approx 2,7$ و $\ln 2 \approx 0,7$

(II) ليكن k عددا حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$

① ① تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين لـ α و β بحيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$ ن 0,75

ⓑ حدد قيمة k بحيث يكون α و β هما حلا المعادلة $f(x) = 0$. ن 0,75

نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2$

② ① تأكد من أن : $f'_k(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ ن 0,50

ⓑ إعط جدول تغيرات f_k . ن 0,50

③ ① استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b . بحيث : $a < \frac{1}{k} < b$ ن 0,50

ⓑ بين أن $a = \alpha$ و $b = \beta$ ن 0,75

④ ① باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^t xe^{-kx} dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$; $(\forall t \in \mathbb{R})$ ن 0,75

ⓑ أحسب التكامل : $I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx$ بدلالة α و β . ن 0,75

Ⓒ استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$ ن 0,50

⑤ بين أنه إذا كان u و v عددا حقيقيان مختلفين موجبين قطعاً . بحيث : $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$ ن 0,75

فإن : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$