التمرين الأول : (3,0 ن)

■ ① أ

لدينا (x,y) حل للمعادلة (E) .

$$\Leftrightarrow \quad x^2(x^2+7)=y(2x+y)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\delta a)^2((\delta a)^2+7)=(\delta b)(2\delta a+\delta b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2(\delta^2a^2+7)=b(2a+b)}\ (*)$$

■ ① ب

لدينا : $x\wedge y=\delta$

$$\Leftrightarrow \quad \delta a\wedge \delta b=\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad a\wedge b=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2\wedge b=1}\quad (1)$$

و لدينا حسب النتيجة $(*)$: $b\ /\ a^2(\delta^2a^2+7)$

و بما أن $a^2\wedge b=1$ وذلك حسب النتيجة (1)

فإنه حسب $(Gauss)$: $\boxed{b\ /\ (\delta^2a^2+7)}$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ :\ (\delta^2a^2+7)=kb$

في المعادلة $(*)$ نعوض التعبير (δ^2a^2+7) بالتعبير kb نجد :

$$kba^2=b(2a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{ka^2=(2a+b)}$$

■ ① ج

ننطلق من الكتابة : $ka^2=2a+b$

$$\Leftrightarrow \quad a(ka-2)=b$$

$$\Rightarrow \quad a\ /\ b$$

$$\Rightarrow \quad a\ /\ 1b$$

و بما أن : $a\wedge b=1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $\boxed{a\ /\ 1}$

و نعلم أن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه

و بالتالي : $\boxed{a=1}$

■ ① د

نعوض a بالعدد 1 في المعادلة $(*)$ نجد : $\delta^2+7=b(2+b)$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+7=b^2+2b$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+7+1=b^2+2b+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+8=(b+1)^2$$

■ ②

ننطلق من الكتابة : $(b+1)^2=\delta^2+8$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1)^2-\delta^2=8$$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1-\delta)(b+1+\delta)=8$$

نفصل هنا بين أربع حالات :

الحالة الأولى :

$$\begin{cases}b+1-\delta=-1\\ b+1+\delta=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{-11}{2}\\ \delta=\dfrac{-7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-7}{2}\notin\mathbb{N}\\ y=\dfrac{77}{4}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

أو

$$\begin{cases}b+1-\delta=-8\\ b+1+\delta=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{-11}{2}\\ \delta=\dfrac{7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\notin\mathbb{N}\\ y=\dfrac{-77}{4}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

الحالة الثانية :

$$\begin{cases}b+1-\delta=1\\ b+1+\delta=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{7}{2}\\ \delta=\dfrac{7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\notin\mathbb{N}\\ y=\dfrac{49}{4}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

أو

$$\begin{cases}b+1-\delta=8\\ b+1+\delta=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{7}{2}\\ \delta=\dfrac{-7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-7}{2}\notin\mathbb{N}\\ y=\dfrac{-49}{4}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

الحالة الثالثة :

$$\begin{cases}b+1-\delta=2\\ b+1+\delta=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2\\ \delta=1\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=1\ \epsilon\ \mathbb{N}\\ y=2\ \epsilon\ \mathbb{N}\end{cases}}$$

أو

$$\begin{cases}b+1-\delta=4\\ b+1+\delta=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2\\ \delta=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\ \notin\ \mathbb{N}\\ y=-2\ \notin\ \mathbb{N}\end{cases}$$

الحالة الرابعة :

$$\begin{cases}b+1-\delta=-2\\ b+1+\delta=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-4\\ \delta=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\notin\mathbb{N}\\ y=4\ \epsilon\ \mathbb{N}\end{cases}$$

أو

$$\begin{cases}b+1-\delta=-4\\ b+1+\delta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-4\\ \delta=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\ \epsilon\ \mathbb{N}\\ y=-4\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

نستنتج من هذه الدراسة أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $(\mathbb{N}^*)^2$

و هو الزوج : $(x,y)=(1,2)$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ 1 أ

يكون التعبير $\sqrt{16-x^2}$ معرَّفا إذا كان $16-x^2\geq 0$

و يبين الجدول التالي إشارة : $(16-x^2)=(4-x)(4+x)$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$(4-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(16-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

يكون إذن التعبير $\sqrt{16-x^2}$ مُعَرَّفا إذا كان $x\in[-4;4]$

و لدينا : $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\geq 0$

$$\Rightarrow\quad y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$$

$$\Rightarrow\quad y^2+\frac{9}{16}x^2=9$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

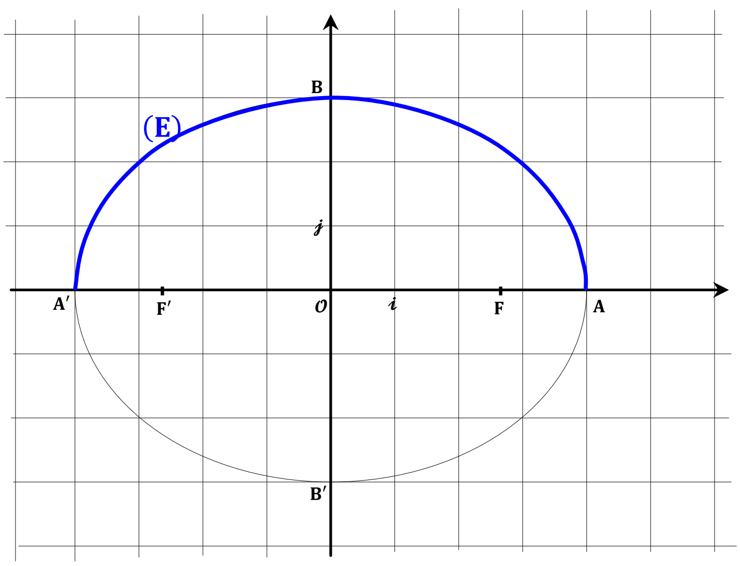
$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\ ;\ x\in[-4;4]\ ;\ y\geq 0}$$

إذن : (E) هو النصف العلوي للإهليلج الذي مركزه O

و رؤوسه $A(4,0)$ و $A'(-4,0)$ و $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$

و بؤرتاه : $F(\sqrt{7};0)$ و $F'(-\sqrt{7};0)$

■ 1 ب



■ 2 أ

لدينا : $I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

نضع : $x=4\cos t$ إذن : $dx=-4\sin t\ dt$

إذا كان $x=x_1$ فإن : $t=t_1$ لأن : $x_1=4\cos t_1$

إذا كان $x=4$ فإن : $t=0$ لأن : $\left(0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)$

إذن :

$$I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{t_1}^{0}(4\sin t)(-4\sin t)\,dt=-12\int_{t_1}^{0}\sin^2 t\,dt$$

نعلم أن : $\sin^2 t=\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)$

و ذلك بإخطاط الدالة المثلثية $t\to\sin^2 t$

إذن : $I(x_1)=-12\int_{t_1}^{0}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$

$$\Leftrightarrow\quad I(x_1)=-12\left(\left[\frac{t}{2}\right]_{t_1}^{0}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_{t_1}^{0}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad I(x_1)=-12\left(\frac{-t_1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin 2t_1}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{I(x_1)=6t_1-3\sin 2t_1}$$

■ 2 ب

لدينا M_1 نقطة من (E) و أفصولها x_1 .

إذن : أرتوبها y_1 يحقق ما يلي :

$$y_1=\frac{3}{4}\sqrt{16-x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad y_1=\frac{3}{4}\sqrt{16-(4\cos t_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad y_1=\frac{3}{4}\sqrt{16(1-\cos^2 t_1)}$$

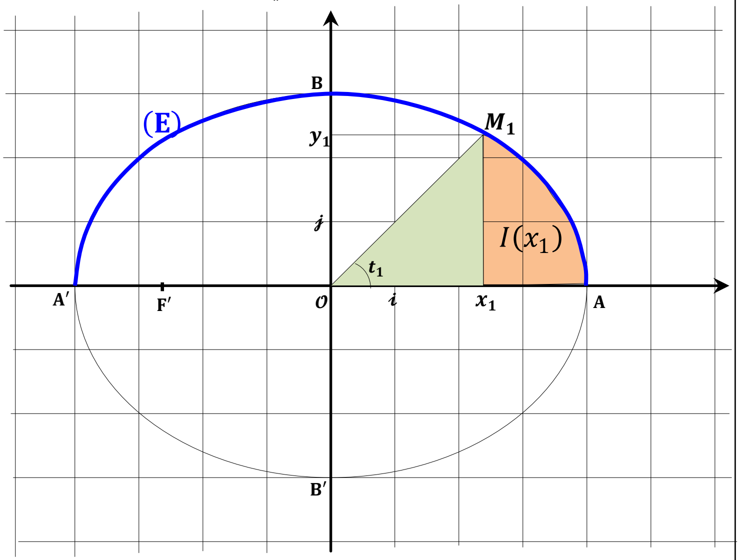
$$\Leftrightarrow\quad y_1=\frac{3}{4}\sqrt{16\sin^2 t_1}$$

$$\Leftrightarrow\quad y_1=\frac{3}{4}\cdot 4\sin t_1$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{y_1=3\sin t_1}$$

■ ② ج

نستعين بالشكل التالي :



لدينا حسب هذا الشكل : $\mathcal{S}(x_1) = \mathcal{S}(Ox_1M_1) + I(x_1)$

$$= \frac{x_1 \times y_1}{2} + I(x_1)$$

$$= \frac{4\cos(t_1) \times 3\sin(t_1)}{2} + I(x_1)$$

$$= 6\cos(t_1)\sin(t_1) + I(x_1)$$

$$= 3\sin(2t_1) + I(x_1)$$

$$= 3\sin(2t_1) + 6t_1 - 3\sin(2t_1)$$

$$= 6t_1$$

■ ② د

لدينا : $\mathcal{S}(x_1) = 6t_1$

إذن : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$

■ ② و

$$\mathcal{S}(x_1) = \frac{1}{2}\mathcal{S}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6t_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}$$

■ ② هـ

لدينا : $M_1\begin{pmatrix} 4\cos t_1 \\ 3\sin t_1 \end{pmatrix}$

يعني : $\overrightarrow{OM_1} = 4\cos(t_1)\vec{\imath} + 3\sin(t_1)\vec{\jmath}$

من أجل : $t_1 = \frac{\pi}{4}$ نحصل على : $\overrightarrow{OM_1} = 2\sqrt{2}\vec{\imath} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{\jmath}$

ونعلم أن : $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}$

و منه النقطة M_1 مُعَرَّفَة بالزوج : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ في المعلم $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

■ (I) ①

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا :

$$M(a,b) + M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+b)+(c+d) & -(b+d) \\ (b+d) & (a+c) \end{pmatrix}$$

$$= M\big((a+c),(b+d)\big) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

و لدينا كذلك :

$$M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ac-bd)+(bc+ad+bd) & -(bc+ad+bd) \\ (bc+ad+bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

$$= M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (I) ②

لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

إذن $+$ قانون تركيب داخلي في E .

و بما أن : $+$ تبادلي و تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $+$ تبادلي و تجميعي في E .

و بما أن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لِـ $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لِـ $+$ في E .

و لدينا :

$$M(a,b)+M(-a,-b)=M(-a,-b)+M(a,b)=M(0,0)$$

إذن كل مصفوفة $M(a,b)$ من E تقبل مماثلة $M(-a,-b)$ بالنسبة لـ $+$

و بالتالي : $\boxed{(E,+) \text{ زمرة تبادلية .}}$ (1)

بما أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

و بما أن : E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $\boxed{\times \text{ تجميعي و توزيعي على } + \text{ في } E \text{ .}}$ (2)

و لدينا : $M(a,c)\times M(1,0)=M(a,c)$

و : $M(1,0)\times M(a,c)=M(a,c)$

إذن $\boxed{M(1,0) \text{ هو العنصر المحايد لـِ } \times \text{ في } E \text{ .}}$ (3)

و لدينا :

$$M(a,b)\times M(c,d)=M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big)$$
$$=M(c,d)\times M(a,b)$$

و منه : $\boxed{\times \text{ تبادلي في } E \text{ .}}$ (4)

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$\boxed{(E,+,\times) \text{ حلقة واحدية تبادلية.}}$

■ (I) ③ أ

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $x^2+xy+y^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2-xy=-xy \\ x^2+xy+y^2+xy=xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=-xy\geq 0 \\ (x+y)^2=xy\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad xy=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^2+y^2=0}$$

إذن : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها O و شعاعها 0

و لإيقاف هذا العبث المبين نقول : $\boxed{x=y=0}$

عكسيا : إذا كان $x=y=0$ فإن : $x^2+xy+y^2=0$

و بالتالي :

$$\boxed{\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad (x^2+xy+y^2)\Leftrightarrow(x=y=0)}$$

■ (I) ③ ب

لدينا : $M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \det M(a,b)=a^2+ab+b^2$$

إذن : تكون المصفوفة $M(a,b)$ قابلة للقلب إذا كان $a^2+ab+b^2\neq 0$

يعني : $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

و بالتالي : جميع عناصر المجموعة $E\setminus\{M(0,0)\}$ قابلة للقلب .

و لدينا :

$$\big(M(a,b)\big)^{-1}=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & (a+b) \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix} (a+b)+(-b) & -(-b) \\ (-b) & (a+b) \end{pmatrix}$$
$$=M\left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\,;\,\frac{-b}{a^2+ab+b^2}\right)$$

■ (I) ③ ج

نعتبر المجموعة $(E\setminus\{M(0,0)\}\,;\times)$

لدينا : $\times$ قانون تركيب داخلي في $E\setminus\{M(0,0)\}$

لأن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و لدينا : $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـِ $\times$ في $E\setminus\{M(0,0)\}$

و كل عنصر يقبل مماثلا(مقلوبا) في $E\setminus\{M(0,0)\}$

إذن : $\boxed{(E\setminus\{M(0,0)\}\,;\times) \text{ زمرة.}}$ (5)

و نعلم أن : $\boxed{(E,+) \text{ زمرة تبادلية}}$ (6)

و نعلم كذلك أن $\boxed{\times \text{ تبادلي و توزيعي على } + \text{ في } E\setminus\{M(0,0)\}}$ (7)

إذن من النتائج (5) و (6) و (7) نستنتج أن : $\boxed{(E,+,\times) \text{ جسم تبادلي}}$

■ (II) ①

ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $(\exists\sigma_1\in\mathbb{R}),(\exists\sigma_2\in\mathbb{R}^*) \;;\; \sigma=\sigma_1+i\sigma_2$

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا .

نضع : $z=m_1+m_2\sigma$

$$\Rightarrow \quad z=m_1+m_2(\sigma_1+i\sigma_2)$$
$$\Rightarrow \quad z=m_1+m_2\sigma_1+im_2\sigma_2$$

بما أن : $z=x+iy$ فإن : $\begin{cases} x=m_1+m_2\sigma_1 \\ y=m_2\sigma_2 \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} m_1=\left(x-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y\right)\in\mathbb{R} \\ m_2=\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)\in\mathbb{R} \end{cases}$

يعني : $(\forall z\in\mathbb{C}), (\exists (m_1,m_2)\in\mathbb{R}^2)$; $z = m_1 + m_2\sigma$

إذن $\boxed{\{1;\sigma\} \text{ أسرة مولدة لـ } \mathbb{C} .}$ (8)

لتكن $x+\sigma y$ تأليفة خطية منعدمة لـِ 1 و σ يعني : $x+\sigma y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x + y(\sigma_1 + i\sigma_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y\sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}$$

إذن $\boxed{\{1;\sigma\} \text{ أسرة حرة}}$ (9)

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1;\sigma\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

■ (II) ②

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi\big(M(a,b)+M(c,d)\big) = \psi\big(M(a+c\,;b+d)\big)$

$$= (a+c)+\sigma(b+d)$$

$$= (a+\sigma b)+(c+\sigma d)$$

$$= \psi\big(M(a,b)\big)+\psi\big(M(c,d)\big)$$

إذن ψ تشاكل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

ليكن $(a+\sigma b)$ عنصرا من $\mathbb{C}$.

لنحل المعادلة $\psi\big(M(x,y)\big) = a+\sigma b$ ذات المجهول $M(x,y)$ في E

لدينا : $\psi\big(M(x,y)\big) = a+\sigma b$

$$\Leftrightarrow \quad x+\sigma y = a+\sigma b$$

بما أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

فإن كل عدد عقدي يكتب بكيفية وحيدة على شكل تأليفة خطية للعنصرين 1 و σ

إذن : $\begin{cases} x=a\\ y=b\end{cases}$

و بالتالي :

$$(\forall (a+\sigma b)\in\mathbb{C})\ ;\ \exists!\, M(x,y)\in E \ :\ \psi\big(M(x,y)\big) = (a+\sigma b)$$

و منه : ψ تقابل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

$\boxed{\text{و بالتالي } \psi \text{ تشاكل تقابلي من } (E,+) \text{ نحو } (\mathbb{C},+)}$

■ (II) ③

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

لدينا : $\Delta = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\left(\frac{i\pi}{3}\right)}$$

و

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = e^{\left(\frac{-i\pi}{3}\right)}$$

■ (II) ④

لدينا : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن :
$$\sigma^2 + 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma$$

إذن : $\boxed{\sigma^2 + 1 = \sigma}$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big) = \psi\big(M(ac-bd\,;bc+ad+bd)\big)$

$$= (ac-bd)+\sigma(bc+ad+bd)$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\psi\big(M(a,b)\big)\times\psi\big(M(c,d)\big) = (a+\sigma b)\times(c+\sigma d)$$

$$= ac+ad\sigma+bc\sigma+\sigma^2 bd$$

$$= ac+ad\sigma+bc\sigma+(\sigma-1)bd$$

$$= ac+ad\sigma+bc\sigma+bd\sigma-bd$$

$$= \boxed{(ac-bd)+\sigma(bc+ad+bd)}$$

نستنتج إذن أن :

$$\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big) = \psi\big(M(a,b)\big)\times\psi\big(M(c,d)\big)$$

و بالتالي : $\boxed{\psi \text{ تشاكل من } (E,\times) \text{ نحو } (\mathbb{C},\times)}$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

■ (I) ①

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{-\infty} - \frac{1}{2} = \boxed{-\infty}$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لـِ $(\mathscr{C})$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{0^+}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0^+} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

إذن المستقيم $y = \frac{-1}{2}$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

■ (I) ② (أ)

f دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها عبارة عن تشكيلة من الدوال المعرفة و القابلة للأشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

لدينا :
$$f'(x) = 4\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{4(x-2x\ln x)}{x^4} = \frac{4(1-2\ln x)}{x^3}$$

■ (I) ② ب

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\quad ; \quad f'(x) = \dfrac{4(1-2\ln x)}{x^3}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

إذا كان : $x = \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) = 0$

إذا كان : $x > \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x < \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{e}-\frac{1}{2}$	↘	$\frac{-1}{2}$

■ (I) ③

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0;\sqrt{e}[$

إذن f تقابل من أي مجال I ضمن $]0;\sqrt{e}[$ نحو صورته $f(I)$.

إذن : f تقابل من المجال $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]f(1);f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]-0{,}5\,;0{,}2[$

و بما أن : $0 \in]-0{,}5\,;0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا α في المجال $]1;\sqrt{e}[$ بالتقابل f

أي : $\boxed{\exists!\ \alpha \in]1;\sqrt{e}[\ ;\ f(\alpha)=0}$ (1)

<u>و بنفس الطريقة :</u>

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\sqrt{e}\,;+\infty[$

إذن f تقابل من أي مجال J ضمن $]\sqrt{e}\,;+\infty[$ نحو صورته $f(J)$

أي f تقابل من المجال $]\sqrt{e}\,;3[$ نحو المجال $]f(3)\,;f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]\sqrt{e}\,;3[$ نحو $]-0{,}01\,;\,0{,}2[$

و بما أن $0 \in]-0{,}01\,;\,0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا β في المجال $]\sqrt{e}\,;3[$ بالتقابل f

أي : $\boxed{\exists!\ \beta \in]\sqrt{e}\,;3[\ ;\ f(\beta)=0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين α و β

بحيث : $\boxed{1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3}$

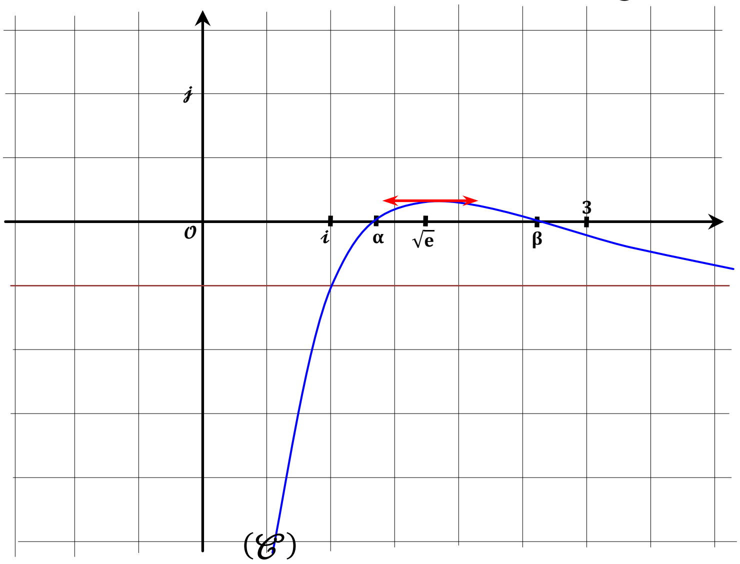
■ (I) ④

معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الأفصول 1 يكتب على شكل :

$$\begin{aligned}(T) : y &= f'(1)(x-1)+f(1)\\ &= 4(x-1)+\left(\frac{-1}{2}\right)\\ &= 4x-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

و بالتالي : $(T) : y = 4x - \frac{9}{2}$

■ (I) ⑤



■ (II) ①

ليكن $t \geq 0$ إذن : $-t^2 \leq 0$ ومنه : $1-t^2 \leq 1$

أي : $(1-t)(1+t) \leq 1$

نضرب كلا الطرفين في العدد الموجب $\left(\frac{1}{1+t}\right)$ نحصل على :

$\boxed{1-t \leq \dfrac{1}{1+t}}$ (1)

و لدينا كذلك $1+t \geq 1$ إذن : $\boxed{\dfrac{1}{1+t} \leq 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{\forall t \in [0;+\infty[\quad ; \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1}$$

■ (II) ②

ليكن a عنصرا من $[0;+\infty[$

لدينا : $\forall t \in [0;+\infty[\quad ; \quad 1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^a (1-t)\,dt \leq \int_0^a \left(\frac{1}{1+t}\right)dt \leq \int_0^a 1\,dt$$

$$\Rightarrow \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^a \leq [\ln(1+t)]_0^a \leq [t]_0^a$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(a-\frac{a^2}{2}\right) \leq \ln(1+a) \leq a}$$

■ (III) ①

لدينا f_n دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$

لأنها تضم تركيبة من الدوال الاعتيادية القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

$$f_n'(x) = n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{n(1-2\ln x)}{x^3}$$

بما أن : $\frac{n}{x^3} \geq 0 \quad ; \quad \forall x > 0$

فإن إشارة $f_n'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n}{2e}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

■ (III) ②

دراسة التقعر و نقط الانعطاف يستدعي حساب المشتقة الثانية لـ f_n

$$f_n''(x) = \frac{x^3\left(\frac{-2n}{x}\right) - 3x^2n(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_n''(x) = \frac{n(6\ln x - 5)}{x^4}$$

إذن $f_n''(x)$ تنعدم إذا كان $(6\ln x - 5) = 0$

يعني : $\ln x = \frac{5}{6}$ أي : $x = e^{\frac{5}{6}}$

إذا كان $x > e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6\ln x - 5) > 0$ و منه : $f''(x) > 0$

إذا كان $x < e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6\ln x - 5) < 0$ و منه : $f''(x) < 0$

نلاحظ أن $f_n''(x)$ تنعدم في النقطة ذات الأفصول $e^{\frac{5}{6}}$ و تغير إشارتها بجوار تلك النقطة

إذن $(\mathcal{C}_n)$ يقبل نقطة انعطاف و هي : $\left(e^{\frac{5}{6}} \; ; \; \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2}\right)$

■ (III) ③ أ

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

إذا كان $x = 0$ فإن $f_{n+1}(x) = f_n(x)$

إذا كان $x > 1$ فإن $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

إذا كان $x < 1$ فإن $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

■ (III) ③ ب

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$-$	0	$+$
$(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$	$(\mathcal{C}_n)$ أسفل $(\mathcal{C}_{n+1})$	$(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$ يتقاطعان	$(\mathcal{C}_{n+1})$ فوق $(\mathcal{C}_n)$

■ (III) ④

لدينا f_n دالة تزايدية قطعا على $]0;\sqrt{e}[$

إذن f_n تقابل من أي مجال I ضمن $]0;\sqrt{e}[$ نحو صورته $f_n(I)$

و منه f_n تقابل من $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]-0,5\,;0,2[$

و بما أن : $0 \,\epsilon\,]-0,5\,;0,2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا u_n من $]1\,;\sqrt{e}[$.

يعني : $\boxed{\exists!\ u_n \,\epsilon\,]1;\sqrt{e}[\;\; ; \;\; f_n(u_n) = 0}$ (1)

و بنفس الطريقة : لدينا f_n تناقصية قطعا على $]\sqrt{e}\,;+\infty[$

إذن f_n تقابل من أي مجال J ضمن $]\sqrt{e}\,;+\infty[$ نحو صورته $f_n(J)$

و منه : f_n تقابل من $]\sqrt{e}\,;n[$ نحو $]f_n(n)\,;0,2[$

و بما أن $0 \,\epsilon\,]f_n(n)\,;0,2[$ لأن $\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا v_n من $]\sqrt{e}\,;n[$

يعني : $\boxed{\exists!\ v_n > \sqrt{e} \;\; ; \;\; f_n(v_n) = 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين u_n و v_n بحيث : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$

■ (III) ⑤

لدينا : $\sqrt{e} > u_n > 1$ إذن حسب (III)③: $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$

و نعلم أن : $f_{n+1}(u_{n+1}) = f_n(u_n) = 0$

إذن : $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية على $]1\,;\sqrt{e}[$ فإن : $u_n > u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية تناقصية قطعا .

■ (III) ⑥ أ

لدينا : $\forall a \,\epsilon\, [0\,;+\infty[\; ; \; a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$

و لدينا : $u_n > 1$ إذن : $u_n - 1 > 0$

و منه : $(u_n - 1) - \frac{1}{2}(u_n-1)^2 \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4) \; ; \; \frac{2(u_n-1) - (u_n-1)^2}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4) \; ; \; \frac{(u_n-1)(2-u_{n+1})}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$$

$$(*) \quad \Leftrightarrow \boxed{(\forall n \geq 4) \;;\; \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)}$$

■ (III) 6 ب

ونعلم أن : $f_n(u_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n\ln(u_n)}{(u_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(u_n) = \frac{(u_n)^2}{2n}$$

ننطلق إذن من الشق الأول من التأطير $(*)$: $\ln(u_n) \leq u_n - 1$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1} \; (7)$$

و لدينا كذلك حسب الشق الثاني من التأطير $(*)$:

$$\frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \frac{(u_n)^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad (u_n - 1) \leq \frac{2(u_n)^2}{2n(3 - u_n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)}} \; (8)$$

من (7) و (8) نحصل على التأطير (9) التالي :

$$(9) \quad \boxed{(\forall n \geq 4) \;;\; \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)}}$$

■ (III) 6 ج

لدينا $u_n < \sqrt{e}$ إذن : $\boxed{\frac{(u_n)^2}{2n} < \frac{e}{2n}} \; (10)$

و $3 - u_n > 3 - \sqrt{e}$

إذن : $\boxed{\frac{1}{3 - u_n} < \frac{1}{3 - \sqrt{e}} < 1} \; (11)$

من (10) و (11) نستنتج أن : $\frac{(u_n)^2}{(3 - u_n)} < e$

و منه : $\boxed{\frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} < \frac{e}{n}} \; (12)$

من (9) و (10) و (12) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} \leq \frac{e}{n}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 4) \;;\; \frac{1}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{e}{n}}$

■ (III) 6 د

لدينا : $\frac{1}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{e}{n}$

$$\frac{1}{2n} \xrightarrow{+\infty} 0 \qquad \frac{e}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}(u_n - 1) = 0$ أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} u_n = 1}$

■ (III) 7 أ

لدينا : $n \geq 4$

$$\Rightarrow \quad \frac{5n}{6} e^{\frac{-5}{3}} \geq \frac{20}{6} e^{\frac{-5}{3}}$$

باستعمال الآلة الحاسبة لدينا : $\frac{20}{6} e^{\frac{-5}{3}} \approx 0{,}63 > 0{,}5$

$$\Rightarrow \quad \frac{20}{6} e^{\frac{-5}{3}} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5n}{6} e^{\frac{-5}{3}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5n}{6} e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad f_n\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \geq f_n(v_n)$$

و بما أن f_n دالة تناقصية على المجال $]\sqrt{e} \,;\, +\infty[$

فإن : $\boxed{e^{\frac{5}{6}} \leq v_n}$

■ (III) 7 ب

لدينا : $f_n(v_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n\ln(v_n)}{(v_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ln(v_n) = \frac{(v_n)^2}{2n}} \quad (*)$$

و لدينا : $v_n > e^{\frac{5}{6}}$ إذن : $\ln(v_n) > \frac{5}{6}$

و منه باستعمال $(*)$ نجد : $\frac{(v_n)^2}{2n} > \frac{5}{6}$

$$\Leftrightarrow \quad (v_n)^2 > \frac{10}{6} n$$

$$\Leftrightarrow \quad v_n > \sqrt{\frac{10n}{6}}$$

بما أن : $\lim\limits_{n\infty} \sqrt{\frac{10n}{6}} = +\infty$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} v_n = +\infty}$