الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2003

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) الآتية : $\boxed{(E)\ :\ x^2(x^2+7)=y(2x+y)}$

ليكن (x,y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x=\delta a$ و $y=\delta b$

1) نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E) .

أ) تحقق أن : $a^2(\delta^2a^2+7)=b(2a+b)$ — 0,50 ن

ب) إستنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2a^2+7=kb$ و $2a+b=ka^2$ — 0,50 ن

ج) بين أن : $a=1$ — 0,50 ن

د) إستنتج أن : $(b+1)^2=\delta^2+8$ — 0,75 ن

2) حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) . — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته : $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

1) أ) بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده. — 0,50 ن

ب) أرسم المنحنى (E) . — 0,50 ن

2) لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتيهما على التوالي هما : $(4;0)$ و $(0;3)$ — 0,75 ن

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0;4]$.

نضع : $x_1=4\cos(t_1)$ حيث : $0\le t_1\le\frac{\pi}{2}$ و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

أ) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $x=4\cos(t)$ حيث : $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ — 1,00 ن

بين أن : $I(x_1)=6t_1-3\sin(2t_1)$

ب) لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) و المنحنى (E) . — 0,75 ن

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E)

0,25 ن | ب) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3\sin(t_1)$

0,25 ن | ج) أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 .

0,25 ن | د) إستنتج قيمة S .

0,25 ن | و) بين أن : $S(x_1) = \frac{1}{2}S \iff t_1 = \frac{\pi}{4}$

0,25 ن | هـ) حدد إحداثيتي M_1 في المعلم $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ في حالة : $t_1 = \frac{\pi}{4}$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

الجزء الأول لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لتكن E مجموعة المصفوفات الآتية : $\boxed{E = \{M_{(a,b)} \ / \ (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\}}$

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

0,75 ن | 1) بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,25 ن | 2) بين أن : $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

0,50 ن | 3) أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x^2+xy+y^2=0) \iff (x=y=0)$

0,25 ن | ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E,+,\times)$

0,50 ن | ج) إستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

الجزء الثاني ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

0,25 ن | 1) بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

0,75 ن | 2) نعتبر التطبيق ψ المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \psi : & E & \to & \mathbb{C} \\ & M_{(a,b)} & \to & a+\sigma b \end{array}}$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

0,75 ن | 3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حليها على الشكل المثلثي

0,50 ن | 4) نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ψ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

	التمرين الرابع : (9,0 ن) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{4\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$
	(I) و ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ وحدته : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=2\,cm$
0,50 ن	① أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C})$
0,25 ن	② ⓐ بين أن : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;+\infty[\;;\; f'(x)=4\left(\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\right)$
0,75 ن	ⓑ إعط جدول تغيرات الدالة f .
0,75 ن	③ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$
0,50 ن	④ حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1
0,75 ن	⑤ أرسم $(\mathscr{C})$
0,25 ن	(II) ① بين أن : $\forall\, t\,\epsilon\,[0;+\infty[\;;\; 1-t\le\dfrac{1}{1+t}\le 1$
0,50 ن	② استنتج أن : $\forall\, a\,\epsilon\,[0;+\infty[\;;\; a-\dfrac{a^2}{2}\le\ln(1+a)\le a$
	(III) لكل عدد صحيح n بحيث $n\ge 4$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=\dfrac{n\,ln\,x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$
	و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم .
0,50 ن	① أدرس تغيرات الدالة f_n .
0,50 ن	② أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$
0,25 ن	③ ⓐ قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x .
0,25 ن	ⓑ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$.
0,50 ن	④ بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$
0,50 ن	⑤ بين أن $(u_n)_{n\ge4}$ متتالية تناقصية قطعا مستعملا نتيجة السؤال ③
0,25 ن	⑥ ⓐ باستعمال $②(II)$ بين أن : $(\forall n\ge 4)\;;\;\dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\le\ln(u_n)\le u_n-1$
0,25 ن	ⓑ استنتج أن : $(\forall n\ge 4)\;;\;\dfrac{(u_n)^2}{2n}\le u_n-1\le\dfrac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$
0,25 ن	ⓒ بين أن : $(\forall n\ge 4)\;;\;\dfrac{1}{2n}\le u_n-1\le\dfrac{e}{n}$
0,50 ن	ⓓ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge4}$ متقاربة محددا نهايتها
0,50 ن	⑦ ⓐ بين أن : $(\forall n\ge 4)\;;\; e^{\frac{5}{6}}<v_n$
0,50 ن	ⓑ استنتج أن : $\lim\limits_{n\infty} v_n=+\infty$