المخروطيات
المنحنيات من الدرجة الثانية

مثال 1 : **الطريقة الأولى تعتمد على تغيير المعلم بتغيير الأساس**

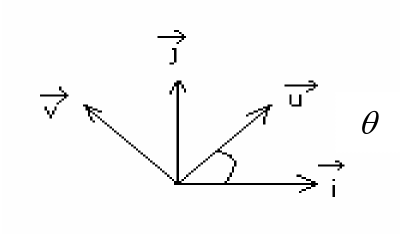
في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ؛ نعتبر المجموعة : $(E)=\left\{M\left(x,y\right)\in \mathcal{P} / 5x^2+5y^2+6xy-8=0\right\}$.

في المستوى المتجهي $\mathcal{V}_2$ ؛ نعتبر المتجهتين : $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ و $\vec{v}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

1. حدد معادلة ديكارتية للمنحنى (E) في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ثم استنتج طبيعة المنحنى (E).
2. أنشئ المنحنى (E) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

الحل : تذكير :

إذا كان $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ و $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أساسان متعامدان ممنظمان حيث : $\left(\overline{\vec{i},\vec{u}}\right)\equiv\theta[2\pi]$ و $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ؛ فإن :



$\vec{u}=\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}$ و $\vec{v}=-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}$.

في المثال ؛ لدينا : $\vec{u}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i}+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ و $\vec{v}=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i}+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$.

يتم اختيار $\theta=\frac{\pi}{4}$ بحيث تكون معادلة (E) غير محتوية على الحد xy .

1. نعتبر M نقطة من المستوى $\mathcal{P}$ بحيث :

(x,y) هو زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (X,Y) هو زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

لدينا :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}+Y\vec{v} \iff x\vec{i}+y\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}X\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}Y\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$$

$$\iff \left\{\boxed{\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{array}}\right.$$

ومنه فإن :

$$\begin{aligned}
M\in(E) &\iff 5x^2+5y^2+6xy-8=0 \\
&\iff \frac{5}{2}(X-Y)^2+\frac{5}{2}(X+Y)^2+\frac{6}{2}(X-Y)(X+Y)-8=0 \\
&\iff 5\left(X^2-2XY+Y^2\right)+5\left(X^2+2XY+Y^2\right)+6\left(X^2-Y^2\right)-16=0 \\
&\iff 16X^2+4Y^2-16=0 \\
&\iff \boxed{\frac{X^2}{1^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1}
\end{aligned}$$

إذن (E) إهليليج مركزه $O(0,0)$ ورؤوسه بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ هي : $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$ و $B(0,2)$ و $B'(0,-2)$.

لدينا : $a=1$ و $b=2$. بما أن $a<b$ فإن : $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ ومنه فإن بؤرتي الإهليليج (E) بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ هما $F\left(0,\sqrt{3}\right)$ و $F'\left(0-\sqrt{3}\right)$. ودليلاه هما : $(D):Y=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D'):Y=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

تباعده المركزي هو : $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

وبما أن : $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$ فإن : $\begin{cases} \boxed{X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)} \end{cases}$. إذن بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ نحصل على :

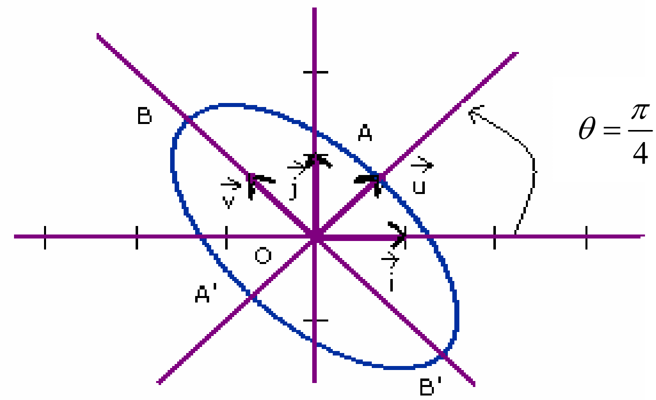
رؤوس (E) هي : $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $B\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ و $B'\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

بؤرتي (E) هما : $F\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ و $F'\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

دليلا (E) هما : $(D):\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x+y=\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ و $(D'):\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

أي : $(D):-x+y=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ و $(D'):x+y=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

إنشاء الإهليليج (E) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$:



مثال 2 : الطريقة الثانية تعتمد على الدوران

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ نعتبر المجموعة $(E)=\{M(x,y)\in P / 5x^2+5y^2+6xy-8=0\}$

ونعتبر الدوران R الذي مركزه $O(0,0)$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$.

1. أكتب معادلة ديكارتية للمجموعة $[R(E)]$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ثم استنتج طبيعة $[R(E)]$.
2. حدد طبيعة المجموعة (E) ثم أنشئها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل : لتكن M نقطة من المستوى P بحيث :

(x,y) هو زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (X,Y) هو زوج إحداثيتي النقطة $M'=R(M)$ بالنسبة للمعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$. لدينا :

$$M'=R(M)\Leftrightarrow\begin{cases} X=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y \\ Y=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \boxed{X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)} \end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y) \end{cases}}$$

تذكير : الصيغة التحليلية للدوران $R(O,\theta)$ هي : $\begin{cases} X=\cos(\theta)x-\sin(\theta)y \\ Y=\sin(\theta)x+\cos(\theta)y \end{cases}$

لدينا $M'(X,Y)\in R(E)$ إذن $\exists M(x,y)\in E \,/\, M'=R(M)$ ومنه فإن :

$5x^2+5y^2+6xy-8=0$ و $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y) \end{cases}$.

إذن : $5\times\frac{1}{2}(X+Y)^2+5\times\frac{1}{2}(-X+Y)^2+6\times\frac{1}{2}(X+Y)(-X+Y)-8=0$

أي : $5\left(X^2+Y^2+2XY\right)+5\left(X^2+Y^2-2XY\right)+6\left(Y^2-X^2\right)-16=0$

يكافئ : $4X^2+16Y^2=16$ وبالتالي فإن : $\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{1^2}=1$: $[R(E)]$. ومنه فإن $(E')=R(E)$ إهليليج مركزه $O(0,0)$

ولدينا : $a=2$ و $b=1$ إذن : $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ لدينا :

رؤوس (E') هي : $A(2,0)$ و $A'(-2,0)$ و $B(0,1)$ و $B'(0,-1)$.

بؤرتي (E') هما : $F(\sqrt{3},0)$ و $F'(-\sqrt{3},0)$.

التباعد المركزي للإهليليج (E') هو : $e=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

دليلا (E') هما : $(D):x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D'):x=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

2. إنشاء المجموعة (E) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$:

لدينا : $(E')=R\left(O,\frac{\pi}{4}\right)((E))$ إذن : $(E)=R\left(O,-\frac{\pi}{4}\right)((E'))$ وبما أن (E') إهليليج فإن (E) هو أيضا إهليليج يستنتج من الإهليليج (E') بالدوران الذي مركزه $O(0,0)$ وزاويته $\theta'=-\frac{\pi}{4}$ كما يلي :