المخروطيات

1

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من $\mathcal{P}$ التي تحقق :

$$\frac{y^4}{16}=x^4-2x^2+1$$

1) بين أن (Γ) هو اتحاد مخروطيين (Γ_1) و (Γ_2) .

2) حدد العناصر المميزة للمخروطيين (Γ_1) و (Γ_2) .

3) أنشئ (Γ) .

الجواب : 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$ لدينا :

$$M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow (x^2-1)^2-\left(\frac{y^2}{4}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)\left(x^2-\frac{y^2}{4}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{4}-1=0 \quad \text{أو} \quad x^2-\frac{y^2}{4}-1=0$$

$$\Leftrightarrow M(x,y)\in(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$$

بحيث : $(\Gamma_1) : x^2+\frac{y^2}{4}=1$ هذلول .

$(\Gamma_2) : x^2-\frac{y^2}{4}=1$ هليج .

وبالتالي : $(\Gamma)=(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$

2) العناصر المميزة لـ هليج (Γ_1) :

لدينا : $(\Gamma_1) : \frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ حيث : $a=1$, $b=2$ و $b>a$

لدينا : $c^2=b^2-a^2=3$ إذن : $c=\sqrt{3}$

ومنه : * التباعد المركزي لـ (Γ_1) هو : $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

* البؤرتان لـ (Γ_1) هما : $F_1(0,c)$ و $F_1'(0,-c)$

أي : $F_1(0,\sqrt{3})$ و $F_1'(0,-\sqrt{3})$

* الدليلان لـ (Γ_1) هما : $(D_1) : x=\frac{b^2}{c}$ و $(D_2') : x=-\frac{b^2}{c}$

أي : $(D_1) : x=\frac{4}{\sqrt{3}}$ و $(D_2') : x=-\frac{4}{\sqrt{3}}$

* الرؤوس لـ (Γ_1) هي : $A(+1,0)$, $A'(-1,0)$ و $B(0;+2)$ و $B'(0,-2)$

العناصر المميزة للهذلول (Γ_2) :

لدينا : $(\Gamma_2) : \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ حيث : $a = 1$ و $b = 2$

لدينا : $c^2 = a^2 + b^2 = 5$ إذن : $c = \sqrt{5}$

ومنه : * التباعد المركزي لـ (Γ_2) هو : $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$

* البؤرتان لـ (Γ_2) هما : $F_2(c, 0)$ و $F_2'(-c, 0)$

أي : $F_2(\sqrt{5}, 0)$ و $F_2'(-\sqrt{5}, 0)$

* الدليلان لـ (Γ_2) هما : $(D_2) : x = \frac{a^2}{c}$ و $(D_2') : x = -\frac{a^2}{c}$

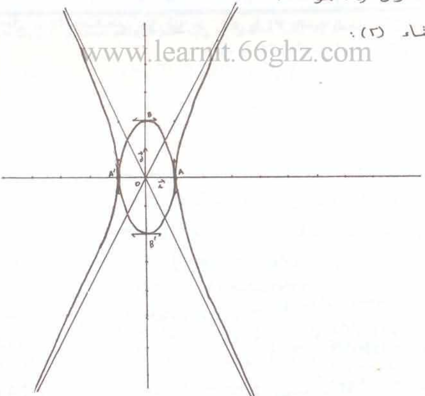
أي : $(D_2) : x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $(D_2') : x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

* المقاربات لـ (Γ_2) هما : $(\Delta_2) : y = \frac{b}{a}x$ و $(\Delta_2') : y = -\frac{b}{a}x$

أي : $(\Delta_2) : y = 2x$ و $(\Delta_2') : y = -2x$

* مركز (Γ_2) هو $O(0, 0)$.

3) إنشاء (Γ) :



2 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق : $y^2-2y-2x-1=0$

1) حدد طبيعة والعناصر لـ (Γ) .

2) اعط معادلة المماس (Γ) عند النقطة $A(1,3)$

3) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $x+2y+1=0$ ، مماس لـ (Γ)

4) أنشئ (Γ).

الجواب : 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$

لدينا : $M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow y^2-2y-2x-1=0$

$\Leftrightarrow (y-1)^2=2(x+1)$

نضع : $\begin{cases} X=x+1 \\ Y=y-1 \end{cases}$ و $\Omega(-1,1)$

معادلة (Γ) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ هي : $Y^2=2X$ $(p=1)$

ومنه : (Γ) شلجم بؤرته : $F(\frac{1}{2},0)$ بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$F(-\frac{1}{2},1)$ بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

ودليله : $(D): X=-\frac{1}{2}$ بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$(D): x=-\frac{3}{2}$ بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

ورأسه $\Omega(-1,1)$.

2) ليكن (Δ_1) المماس لـ (Γ) عند النقطة $A(1,3)$.

لدينا : $A\in(\Gamma)$ إذن معادلة (Δ_1) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

هي : $YY_0=p(X+X_0)$ أي : $2(y-1)=(x+1)+2$

ومنه : $(\Delta_1): y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

3) لنبين أن : $(\Delta): x+2y+1=0$ مماس لـ(Γ)

لتكن : $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$

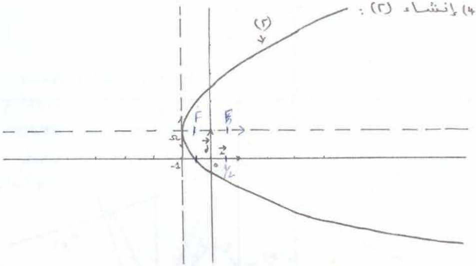
لدينا : $M(x,y)\in(\Gamma)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+1=0 \\ y^2-2y-2x-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ y^2+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

ومنه : $(\Gamma) \cap (\Delta) = \{B(1,-1)\}$

وبالتالي : (Δ) مماس لـ (Γ) .

4) إنشاء (Γ) :



3

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ بحيث :

$$y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$$

1) بين أن (Γ) هو اتحاد جزئين من شلجمين .

2) أنشئ (Γ) .

الجواب : 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$

لدينا :

$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (y-1)^2 = 2(x+2) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x \leq 0 \\ (y-1)^2 = -2(x-2) \end{cases}$$

نعتبر الشلجمين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ بحيث :

$(\mathcal{P}_1) : (y-1)^2 = 2(x+2)$

نضع : $\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y-1 \end{cases}$ و $\Omega_1(-2,1)$

معادلة الشلجم $(\mathcal{P}_1)$ في المعلم $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j})$ هي : $Y^2 = 2X$

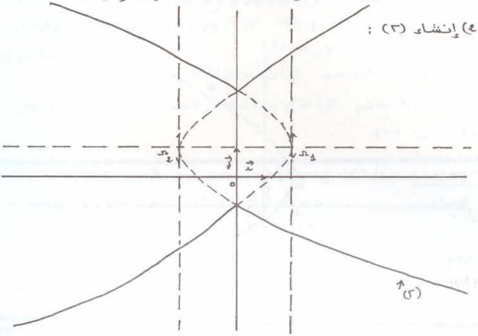
$(\mathcal{P}_2) : (y-1)^2 = -2(x-2)$

$\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-1 \end{cases}$ و $\Omega_2(2,1)$

معادلة $(\mathcal{P}_2)$ في المعلم $(\Omega_2, \vec{i}, \vec{j})$ هي : $Y^2 = -2X$

منه : (Γ) هو إتحاد جزئين من الشلجمين (P_1) و (P_2).

4) إنشاء (Γ) :



4

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

لتكن $(\mathcal{C}_m)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ بحيث :

$$4mx^2 + y^2 - 8x = 0$$ حيث : $m \in \mathbb{R}$

1) حدد تبعاً لقيم m طبيعة $(\mathcal{C}_m)$.

2) أنشئ المنحنيين : $(\mathcal{C}_1)$ ، $(\mathcal{C}_{-1})$

الجواب : 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$.

لدينا : $M(x,y) \in (\mathcal{C}_m) \Leftrightarrow 4mx^2 + y^2 - 8x = 0$

* إذا كان : $m = 0$ فإن : $y^2 = 8x$

ومنه : $(\mathcal{C}_0)$ شلجم.

* إذا كان : $m \neq 0$ فإن :

$$M(x,y) \in (\mathcal{C}_m) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{y^2}{4m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{4m} = \frac{1}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{m}\right)^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{4}{m}} = 1$$

* إذا كان : $m>0$ فإن : $(\mathscr{E}_m)$ إهليلج أو دائرة .

* إذا كان : $m<0$ فإن : $(\mathscr{E}_m)$ هذلول .

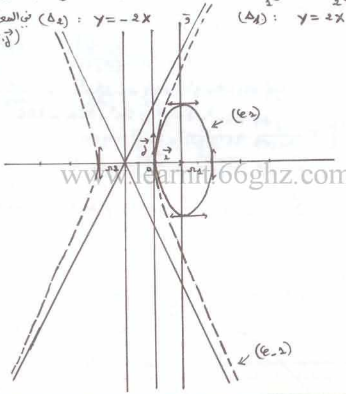
2) إنشاء المنحنيين : $(\mathscr{E}_1)$ و $(\mathscr{E}_{-1})$:

لدينا :

$(\mathscr{E}_1) : \dfrac{(x-1)^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ إهليلج مركزه $\Omega_1(1,0)$ ورؤوسه $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$ و $B(0,2)$ و $B'(0,-2)$ في المعلم $(\Omega_1,\vec{i},\vec{j})$.

لدينا : $(\mathscr{E}_{-1}) : \dfrac{(x+1)^2}{1^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ هذلول مركزه $\Omega_2(-1,0)$ ومقارباته :

$(\Delta_1) : y = 2x$ و $(\Delta_2) : y = -2x$ في المعلم $(\Omega_2,\vec{i},\vec{j})$



5 المستوى $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته : $x = \dfrac{16}{3}$.

1) إعط معادلة ديكارتية للإهليلج (Γ) الذي دليله (D) وبؤرته النقطة O وتباعده المركزي $e = \dfrac{3}{5}$.

2) أنشئ (Γ)

3) لتكن M نقطة من (Γ) ؛ نضع : $\theta \equiv (\vec{i} ; \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi]$

أ- بين أن : $OM = \dfrac{16}{3+3\cos\theta}$

ب- نفترض أن : $|\theta| < \dfrac{\pi}{2}$. المستقيم (OM) يقطع (D) في I و (Γ) في M'

أحسب : $\dfrac{1}{OM'} + \dfrac{1}{OM}$ وبين أن : $\dfrac{1}{OM} - \dfrac{1}{OM'} = \dfrac{2}{OI}$

الجواب : 1) لدينا الإهليلج : $(\Gamma) = \Gamma(O;(D);e)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى (P) لدينا :

$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M,(D))} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{5} \times \frac{|x - \frac{16}{3}|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

$$\Leftrightarrow 25(x^2+y^2) = 9(x - \frac{16}{3})^2$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 = 9x^2 - 96x + 256$$

$$\Leftrightarrow 16(x+3)^2 + 25y^2 = 400$$

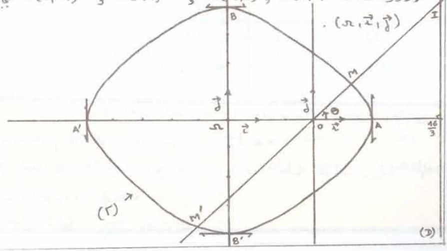
$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

ومنه معادلة الإهليلج (Γ) هي : $\dfrac{(x+3)^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

2) إنشاء الإهليلج (Γ).

لدينا : $(\Gamma) : \dfrac{(x+3)^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ مركزه $\Omega(-3,0)$

ورؤوسه : $A(5,0)$ ، $A'(-5,0)$ و $B(0,4)$ و $B'(0,-4)$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.



3) لدينا : $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OM}) \equiv \theta \quad [2\pi]$ إذن : $\begin{cases} x = OM\cos\theta \\ y = OM\sin\theta \end{cases}$

ولدينا : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM = \frac{3}{5} d(M,D)$

$\Leftrightarrow OM = \frac{3}{5}\left| OM\cos\theta - \frac{16}{3} \right|$ (لأن : $(D) : x = \frac{16}{3}$)

$\Leftrightarrow OM = \frac{3}{5} OM\cos\theta - \frac{16}{3}$ أو $OM = -\frac{3}{5} OM\cos\theta + \frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow OM = \frac{16}{5+3\cos\theta}$ أو $OM = \frac{-16}{5-3\cos\theta} < 0$ غير ممكن

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM = \frac{16}{5+3\cos\theta}$

ب - لدينا : $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OM'}) \equiv \theta + \pi \quad [2\pi]$

بما أن $M' \in (\Gamma)$ فإن : $OM' = \frac{16}{5+3\cos(\pi+\theta)} = \frac{16}{5-3\cos\theta}$

ومنه : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16}(5+3\cos\theta) + \frac{1}{16}(5-3\cos\theta)$

إذن : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{5}{8}$

ولدينا : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16}(5+3\cos\theta) - \frac{1}{16}(5-3\cos\theta)$

إذن : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8}\cos\theta$

ولدينا : $\cos\theta = \frac{\frac{16}{3}}{OI}$ أي : $\cos\theta = \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI}$

ومنه : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI}$

وبالتالي : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$

6

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من $(\mathcal{P})$ بحيث :

$$xy - x - y = 0$$

نعتبر النقطة $\Omega(1,1)$ والمتجهتين : $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ و $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j})$

1) حدد معادلة ديكارتية المنحنى (Γ) في المعلم $(\Omega;\vec{I};\vec{J})$

2) حدد طبيعة والعناصر المميزة للمنحنى (Γ) في المعلم $(\Omega;\vec{I};\vec{J})$.