المتتاليات العددية

1. تذكير:

أ. المتتاليات الحسابية :

تعريف:

(u_n) حسابية $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n=r$ (r أساس (u_n))

كتابة (u_n) بدلالة n :

$$u_n=u_p+(n-p)r$$

حساب المجموع :

$$u_p+u_{p+1}+.......+u_m=(m-p+1).\left(\frac{u_p+u_m}{2}\right)$$

ب. المتتاليات الهندسية :

تعريف:

(v_n) هندسية $\Leftrightarrow$ $v_{n+1}=q.v_n$ (q أساس (v_n))

كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n=v_p.q^{n-p}$$

حساب المجموع :

إذا كان $q\neq 1$: $v_p+v_{p+1}+.......+v_m=v_p.\dfrac{1-q^{m-p+1}}{1-q}$

إذا كان $q=1$: $v_p+v_{p+1}+.......+v_m=(m-p+1)v_p$

ج. رتابة متتالية :

(u_n) تزايدية $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n \geq 0$
(u_n) تناقصية $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n \leq 0$
(u_n) ثابتة $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}=u_n$

د. متتالية مصغورة - مكبورة – محدودة

(u_n) مصغورة بالعدد m $\Leftrightarrow$ $m \leq u_n$
(u_n) مكبورة بالعدد M $\Leftrightarrow$ $u_n \leq M$
(u_n) محدودة $\Leftrightarrow$ $m \leq u_n \leq M$

2. نهاية متتالية :

أ. تعاريف:

نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي العدد الحقيقي l إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع الحدود u_n ابتداءا من رتبة معينة و نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$

ب. أمثلة اعتيادية :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

ج. خاصية :

إذا كانت (u_n) تقبل نهاية فإن هذه النهاية تكون وحيدة .

د. تعاريف و مصطلحات :

- نقول إن (u_n) متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية
- نقول إن (u_n) متباعدة إذا كانت تقبل نهاية لا منتهية أو لا تقبل نهاية

3. العمليات على النهايات :

خاصيات :

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان متقاربتان لدينا :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)\times\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)}\quad\left(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\neq0\right)$
- ملاحظة : الخاصيات بالنسبة للعمليات على النهايات غير المنتهية هي نفسها على الدوال العددية

4. النهايات و الترتيب :

خاصيات

1) $\begin{cases} v_n\leq u_n\leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=l\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

2) $\begin{cases} |u_n-\alpha|\leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

3) $\begin{cases} u_n\leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

4) $\begin{cases} u_n\leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$

5. نهاية المتتالية (q^n) :

خاصية :

$q \leq -1$: (q^n) لا تقبل نهاية

$-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

$q = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

$q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

خاصية :

- كل متتالية تزايدية و مكبورة فهي متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة فهي متقاربة

6. نهاية المتتالية (n^r) $(r \in \mathbb{Q}^*)$

خاصية

إذا كان $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} n^r = +\infty$

إذا كان $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} n^r = 0$

7. نهاية متتالية من نوع $v_n = f(u_n)$:

خاصية:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ و f متصلة في l $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f(l)$

8. نهاية متتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

خاصية :

$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

إذا كانت f متصلة على I و $f(I) \subset I$ و (u_n) متقاربة

فإن نهاية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

ملاحظة:

- ❖ **إذا كانت (u_n) تناقصية فإن** $u_n \leq u_0$
- ❖ **إذا كانت (u_n) تزايدية فإن** $u_0 \leq u_n$

9. متتاليتان متحاديتان :

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان إحداهما تناقصية و الأخرى تزايدية و كانت $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية و نقول أنهما متحاديتان

ملاحظة :

- ❖ **إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان متحاديتان بحيث (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية فإن** $v_n \leq u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$