السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 4

تمرين 1 : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \quad ; n \geq 0 \end{cases}$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n \in IN \quad u_n > 3$

- بالنسبة لـ $n = 0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0 = 4$ و $4 > 3$
- نفترض أن $u_n > 3$ و نبين أن $u_{n+1} > 3$

لدينا : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \dfrac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \dfrac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$

لنعمل الحدودية : $2t^2 - 3t - 9$ ، محددتها هي : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81$

منه : $t_1 = \dfrac{3+9}{4} = 3$ و $t_1 = \dfrac{3-9}{4} = \dfrac{-3}{2}$

منه : $2t^2 - 3t - 9 = 2(t - t_1)(t - t_2) = 2\left(t + \dfrac{3}{2}\right)(t-3) = (2t+3)(t-3)$

منه : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{(2u_n + 3)(u_n - 3)}{u_n + 2}$ ولدينا حسب الافتراض : $u_n > 3$ أي $u_n - 3 > 0$

إذن: $u_{n+1} - 3 > 0$ أي $u_{n+1} > 3$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n \in IN \quad u_n > 3}$

2

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \dfrac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \dfrac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$

لنعمل الحدودية : $t^2 - 2t - 3$ ، محددتها هي : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

منه : $t_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ و $t_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ منه : $t^2 - 2t - 3 = 1(t - t_1)(t - t_2) = (t+1)(t-3)$

منه : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 2} > 0$ (لأن : $u_n > 3$) بالتالي u_n تزايدية قطعا

3

$$u_{n+1} - 3 - \frac{9}{5}(u_n - 3) = \frac{(2u_n + 3)(u_n - 3)}{u_n + 2} - \frac{9}{5}(u_n - 3) = (u_n - 3)\left(\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{9}{5}\right)$$

$$= (u_n - 3)\left(\frac{10u_n + 15 - 9u_n - 18}{5(u_n + 2)}\right) = (u_n - 3)\left(\frac{u_n - 3}{5(u_n + 2)}\right) = \frac{(u_n - 3)^2}{5(u_n + 2)} > 0$$

4

لدينا : $u_{n+1} - 3 > \dfrac{9}{5}(u_n - 3)$ إذن :

$$\begin{cases} u_1 - 3 \geq \dfrac{9}{5}(u_0 - 3) > 0 \\ u_2 - 3 \geq \dfrac{9}{5}(u_1 - 3) > 0 \\ \ldots \geq \ldots \\ u_n - 3 \geq \dfrac{9}{5}(u_{n-1} - 3) > 0 \end{cases}$$

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال

نجد أن : $u_n - 3 \geq \left(\dfrac{9}{5}\right)^n (u_0 - 3)$

بالتالي : $u_n \geq \left(\dfrac{9}{5}\right)^n + 3$

5

لدينا : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\dfrac{9}{5}\right)^n = +\infty$ (لأن : $\dfrac{9}{5} > 1$) إذن : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\dfrac{9}{5}\right)^n + 3 = +\infty$

بالتالي و حسب مصاديق التقارب فإن $\boxed{\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty}$ و هذا يعني أن u_n ليست متقاربة.

تمرين 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) \quad ; n \geq 0 \end{cases}$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n \in IN \quad 1 \leq u_n < 4$

- بالنسبة لـ $n = 0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0 = 1$ و $1 \leq 1 < 4$
- نفترض أن $1 \leq u_n < 4$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} < 4$

لدينا :

$$1 \leq u_n < 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq u_n < 4 \\ 1 \leq \sqrt{u_n} < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 + 1 + 2 \leq u_n + \sqrt{u_n} + 2 < 4 + 2 + 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{u_n + \sqrt{u_n} + 2}{2} < 4 \Rightarrow 2 \leq u_{n+1} < 4$$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n \in IN \quad 1 \leq u_n < 4}$

2

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2 - 2u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2 + \sqrt{u_n} + 2\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2 + t + 2$ ، محددتها هي : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$

منه : $t_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1$ و $t_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2$ منه :

$$-t^2 + t + 2 = -1(t - t_1)(t - t_2) = -(t+1)(t-2) = (t+1)(2-t)$$

منه : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 1\right)\left(2 - \sqrt{u_n}\right) > 0$ (لأن : $\sqrt{u_n} < 2$) بالتالي : u_n تزايدية قطعا

سؤال يتطلب التفكير، لكون من الصعب التعرف على الحدودية انطلاقا من الشكل $-u_n + \sqrt{u_n} + 2$

3

لنبين أن : $\forall n \in IN \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}\left(4 - u_n\right)$

المتفاوتة $0 \leq 4 - u_{n+1}$ سبق إثباتها في السؤال الأول، لدينا :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(8 - u_n - \sqrt{u_n} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(6 - u_n - \sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2 - \sqrt{u_n} + 6\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2 - t + 6$ ، محددتها هي : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25$

منه : $t_1 = \frac{1+5}{-2} = -3$ و $t_2 = \frac{1-5}{-2} = 2$ منه : $-t^2 - t + 6 = -1(t - t_1)(t - t_2) = -(t+3)(t-2) = (t+3)(2-t)$

منه :

$$4 - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 3\right)\left(2 - \sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 3\right) \times \frac{\left(2 - \sqrt{u_n}\right)\left(2 + \sqrt{u_n}\right)}{2 + \sqrt{u_n}} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{u_n} + 3\right)\left(4 - u_n\right)}{2 + \sqrt{u_n}}$$

إذن :

$$\left(4-u_{n+1}\right)-\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)=\left(4-u_n\right)\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{u_n}+3\right)}{2+\sqrt{u_n}}-\frac{2}{3}\right]$$

$$=\left(4-u_n\right)\left[\frac{3\sqrt{u_n}+9-8-4\sqrt{u_n}}{6\left(2+\sqrt{u_n}\right)}\right]=\left(4-u_n\right)\left[\frac{1-\sqrt{u_n}}{6\left(2+\sqrt{u_n}\right)}\right]<0$$

(لأن: $1<\sqrt{u_n}$) بالتالي : $\forall n\in IN \quad 0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)$

سؤال أكثر صعوبة لكونه يتطلب زيادة على التعميل استخراج التعبير $4-u_n$ من خلال استعمال المرافق

4

نعلم أن: $\forall n\in IN \quad 0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)$ (حسب السؤال السابق) إذن :

$$\begin{cases} 0<4-u_1<\frac{2}{3}\left(4-u_0\right) \\ 0<4-u_2<\frac{2}{3}\left(4-u_1\right) \\ \ldots<\ldots<\ldots \\ \ldots<\ldots<\ldots \\ 0<4-u_n<\frac{2}{3}\left(4-u_{n-1}\right) \end{cases}$$

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال نجد أن منه : $0<4-u_n<\left(\frac{2}{3}\right)^n$ منه : $4-\left(\frac{2}{3}\right)^n<u_n<4$

بما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 4-\left(\frac{2}{3}\right)^n=4-0=4$ (لأن : $-1<\frac{2}{3}<1$) و حسب مصاديق التقارب فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=4}$

لاحظ أن فكرة حل السؤال سبق التطرق لها في تمارين سابقة، هذا يعني ضرورة الاستفادة مما سبق.

تمرين 3 :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\sin u_n \;; n\geq 0 \end{cases}$$

I

لدينا : $\forall x\in IR \quad f'(x)=1-\cos(x)\geq 0$

إذن الدالة : $\forall x\in IR \quad f'(x)\geq 0$ إذن f تزايدية على IR

منه: $x\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq f(0) \Rightarrow \sin(x)\geq x$ بالتالي : $\sin x\leq x \quad \forall x\in IR^+$

II

1

بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $0<1<\frac{\pi}{2}$ منه : $0<u_0<\frac{\pi}{2}$

نفترض أن $0<u_n<\frac{\pi}{2}$ منه : $0<\sin(u_n)<\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ منه : $0<\frac{1}{2}\sin(u_n)<\frac{1}{2}$ منه $0<u_{n+1}<\frac{\pi}{2}$

لاحظ أن الدالة الجيب تزايدية على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2

لدينا حسب I و لكون $u_n>0$ فإن: $\sin(u_n)\leq u_n$ منه $\frac{1}{2}\sin(u_n)\leq\frac{1}{2}u_n\leq u_n$ منه $u_{n+1}\leq u_n$

إذن u_n تناقصية

3

بما أن u_n تناقصية و مصغورة بالصفر فإنها متقاربة، لتكن ℓ نهايتها.

نعتبر الدالة : $g(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$ ، بما أن g متصلة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ و بما أن $g\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0;1]\subset\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

فإن ℓ هو أحد حلول المعادلة $g(x)=x$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

ولدينا : $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\ \sin(x)\le x \Rightarrow \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\ g(x)\le\frac{1}{2}x$

إذن : $\begin{cases} g(x)=x \\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le\frac{1}{2}x \\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\le x \\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow x=0$ بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=0}$

تمرين 4 : $\begin{cases} u_0=1\ ,\ u_1=2 \\ u_{n+2}=\frac{3u_{n+1}-u_n}{2}\ ;n\ge 0\end{cases}$

1 لدينا $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3u_{n+1}-u_n}{2}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=\frac{1}{2}v_n$ إذن v_n هندسية

أوجد الحد العام للمتتالية $\forall n\in IN\quad v_n=v_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{u_1-u_0}{2^n}=\frac{1}{n}$

ولدينا $\forall n\in IN\ \ u_{n+1}-u_n=v_n$ منه:

$$\begin{aligned} u_1-u_0&=v_0\\ u_2-u_1&=v_1\\ u_3-u_2&=v_2\\ &\dots\\ u_n-u_{n-1}&=v_{n-1}\end{aligned}$$

منه : $u_n-u_0=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}$

منه: $\forall n\in IN\ \ u_n-1=v_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ منه : $\forall n\in IN\ \ u_n=3-\frac{1}{2^{n-1}}$

2 $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=3}$