السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}$ و $v_n = n\sqrt{n}$

1

لنبين باستعمال التعريف أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

لدينا : $u_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ منه : $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

ليكن : $\varepsilon > 0$ ، لدينا : $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1}{2\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\dfrac{1}{2\varepsilon}\right)^2$

إذن بوضع : $n_0 = E\left(\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right)+1$ نستنتج أن :

$$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq E\left(\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right)+1 \Rightarrow n > \dfrac{1}{4\varepsilon^2} \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

بالتالي : $\left(n \geq n_0 \Rightarrow \left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon\right)$; $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in IN$ ، بالتالي : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

2

لنبين باستعمال التعريف أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$

ليكن $A > 0$ ، لدينا : $v_n > A \Leftrightarrow n\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n^3 > A^2 \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{A^2}$

إذن بوضع : $n_0 = E\left(\sqrt[3]{A^2}\right)+1$ نستنتج أن : $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq E\left(\sqrt[3]{A^2}\right)+1 \Rightarrow n > \sqrt[3]{A^2} \Rightarrow v_n > A$

بالتالي : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$

تمرين يستهدف استيعاب التعريف الرياضي لنهاية متتالية، فرغم قلة استعماله في جل التمارين إلا أنه يعد من أهم المفاهيم الرياضية التي تنبني عليها جل القواعد اللاحقة (مصاديق التقارب ، .....)، المثالان بسيطان ، لكن استيعابهما سيسمح بفهم أكثر لمفهوم نهاية متتالية، حيث أن جل التلاميذ يستطيعون حساب نهاية متتالية دون إدراكهم الفعلي بهذا المفهوم.

تمرين 2 :

$a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$	$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} a_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0+0 = 0$ (لأن: $\left\|\dfrac{2}{3}\right\| < 1$ و $\left\|\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\| < 1$)
$b_n = 2007^n - 2008^n$	$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} b_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2007^n - 2008^n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2008^n\left(\left(\dfrac{2007}{2008}\right)^n - 1\right) = -\infty$ لأن : : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{2007}{2008}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2008^n = +\infty$)
$c_n = \dfrac{(-2)^n+1}{5^n+7}$	$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} c_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{\dfrac{(-2)^n+1}{5^n}}{\dfrac{5^n+7}{5^n}} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^n + \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1+7\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n} = \dfrac{0+0}{1+7\times 0} = 0$
$d_n = \dfrac{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n+3^n}}$	$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} d_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n+3^n}} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^n}}{\left(\sqrt{3}\right)^n}}{\dfrac{\sqrt{2^n+3^n}}{\left(\sqrt{3}\right)^n}} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^n+1}{\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}} = \dfrac{0+1}{\sqrt{0+1}} = 1$

$e_n = 1+\frac{2}{3}+...+\frac{2^n}{3^n}$	$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} e_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...+\frac{2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 1\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
$f_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sin(7^n)$	بملاحظة أن : $\forall n\in IN\ \ \|f_n\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ و أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} f_n = 0$
$u_n = n-\sin(n^5)$	بملاحظة أن : $\forall n\in IN\ \ u_n \ge n-1$ (لأن : $\forall x\in IR\ -\sin(x)\ge -1$) و أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$ فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$
$v_n = \frac{7^n+\sin n}{7^n+\cos(5^n)}$	لدينا : $\forall n\in IN\ \ v_n = \frac{1+\frac{\sin n}{7^n}}{1+\frac{\cos(5^n)}{7^n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$ (لأن : $\forall n\in IN\ \left\|\frac{\sin n}{7^n}\right\| \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$ و $\forall n\in IN\ \left\|\frac{\cos(5^n)}{7^n}\right\| \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$ $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$)
$w_n = n^n$	بملاحظة أن : $\forall n\in IN^*\ \ w_n \ge n$ (لأن : $\forall n\in IN\ (n\ge 1\Rightarrow n^n\ge n^1)$) و أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$ فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = +\infty$
$x_n = 1+2+3+...+n$	$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} x_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{n(n+1)}{2} = +\infty$

تذكرأن : $|a|<1\Rightarrow \lim\limits_{n\mapsto+\infty} a^n = 0$ و $a>1\Rightarrow \lim\limits_{n\mapsto+\infty} a^n = +\infty$ ، $\begin{cases} w_n\le u_n\le v_n \\ \lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ell$

تمرين 3: $u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$

1 لدينا: $\forall n\in IN\ \ \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+1} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1-n-1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} \ge 0$

إذن : $\forall n\in IN\ \ \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \ge \sqrt{n+1}$

2 لدينا حسب السؤال السابق: $\forall n\in IN\ \ \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

ليكن $n\in IN^*$ ، إذن: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ge\sqrt{2}-\sqrt{1}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}}\ge\sqrt{3}-\sqrt{2}$ و … و $\frac{1}{\sqrt{n}}\ge\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

بجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد: $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+..+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

منه: $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \sqrt{n}-1$ بالتالي : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \sqrt{n}$

بالتالي: $\forall n\in IN^*\ \ u_n\ge\sqrt{n}$

3 بما أن $\forall n\in IN^*\ \ u_n\ge\sqrt{n}$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ فإن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$

تمرين توليفي لمتتاليات معرفة على شكل مجموع (سلسلة متتاليات)

تمرين 4 : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ لكل $n\in IN^*$

1 $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}}{30}$

	$$u_3=\frac{1}{\sqrt{3^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{3^2+3}}=\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{11}}{11}+\frac{\sqrt{12}}{12}$$	
	الهدف من هذا السؤال هو فهم طبيعة المتتالية و ليس الحساب	
2	لنبين أن $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\le u_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ ، $\forall n\in IN^*$ لدينا لكل عدد صحيح طبيعي k : $1\le k\le n \Rightarrow n^2+1\le n^2+k\le n^2+n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ إذن : $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ $\dots$ $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ بجمع المتفاوتات طرفا بطرف نجد : $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$	
	يمكن استعمال الرمز $\sum$ للتعبير عن المجموع و جمع أطراف المتفاوتات، لكننا آثرنا كتابة متفاوتات بعد تعويض k بقيم من 1 إلى n حتى يكون الحساب مفهوما.	
3	بما أن $\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\mapsto+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}}=\sqrt{1}=1$ و $\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\mapsto+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}=\sqrt{1}=1$ فإن: $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=1}$	
	المتتالية u_n تكتب اختصارا $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$ ، نذكر أن: $\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_nx^m+b_{n-1}x^{m-1}+\dots+b_0}=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{a_nx^n}{b_nx^m}$	
	تمرين 5 : $u_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n\times(n+1)}$	
1	$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$	
2	$\forall n\in IN^*\quad u_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$	
3	$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=1-0=1$	
	تمرين سهل، لكنه صعب بغياب السؤال الأول. من الأفضل تذكر متساوية السؤال الأول فهي جد مفيدة في كثير من الأسئلة.	
	تمرين 6 : $u_n=\frac{E(\pi)+E(2\pi)+E(3\pi)+\dots+E(n\pi)}{n^2}$	
	لدينا : $\forall k\in IN\quad k\pi-1<E(k\pi)\le k\pi$ ، إذن: $\sum_{k=1}^{n}(k\pi-1)<\sum_{k=1}^{n}E(k\pi)\le\sum_{k=1}^{n}k\pi$ (قمنا بجمع المتفاوتات المحصل عليها بعد تطبيق العبارة السابقة على كل من 1،2،3،....،n) إذن: $\pi\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-n<\sum_{k=1}^{n}E(k\pi)\le\pi\sum_{k=1}^{n}k$ منه : $\pi\frac{n(n+1)}{2}-n<\sum_{k=1}^{n}E(k\pi)\le\pi\frac{n(n+1)}{2}$ منه: $\pi\frac{(n+1)}{2n}-\frac{1}{n}<\frac{\sum_{k=1}^{n}E(k\pi)}{n^2}\le\pi\frac{(n+1)}{2n}$ أي $\pi\frac{(n+1)}{2n}-\frac{1}{n}<u_n\le\pi\frac{(n+1)}{2n}$ و بما أن : $\lim_{n\mapsto+\infty}\pi\frac{(n+1)}{2n}=\frac{\pi}{2}=\lim_{n\mapsto+\infty}\pi\frac{(n+1)}{2n}-\frac{1}{n}$ فإن: $\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\frac{\pi}{2}$	
	للتذكير : $\forall x\in IR\quad E(x)\le x<E(x)+1$ أو أيضا : $\forall x\in IR\quad x-1<E(x)\le x$	