التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \dfrac{2^n \; n!}{(n+1)^n}$

1) أ- بين أن $(1+a)^n > 1+na$ $\quad (\forall a>0)(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- أحسب وبسط $\dfrac{U_n}{U_{n+1}}$ و استنتج أن $(U_n)_{n>0}$ تناقصية

2) أ- بين أن $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

التمرين الثاني

ليكن p عددا حقيقيا بحيث $p \geq 1$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = p$ و $U_{n+1} = p + \dfrac{1}{U_n}$

1) بين أن $p \leq U_n < p+1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) نضع $x_n = U_{2n}$ و $y_n = U_{2n+1}$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ لدينا : $x_{n+1} = p + \dfrac{x_n}{p\,x_n + 1}$ و $y_{n+1} = p + \dfrac{y_n}{p\,y_n + 1}$

ب- بين أن $x_n < y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- بين أن المتتالية $(x_n)_n$ تزايدية و استنتج رتابة المتتالية $(y_n)_n$

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 6}{U_n + 2}$

1) أ- بين أن $U_n \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن $U_n \neq 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) أحسب U_1 ; U_2 ثم بين أن $U_{2k} \leq 2 \leq U_{2k+1} \quad (\forall k \in \mathbb{N})$

3) بين أن $U_{n+1} - 2$ و $U_n - 2$ هما إشارتين مختلفتين

4) أ- بين أن $U_n \geq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- بين أن $|U_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{3}|U_n - 2| \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- استنتج أن $|U_n - 2| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

5) لكل عدد طبيعي n غير منعدم نضع $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n} U_k$ ، $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n} U_{2k}$ و $b_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n} U_{2k+1}$

أ- بين أن $2 \leq U_{2k+1} \leq 2 + \dfrac{1}{9^k}$ و $2 - \dfrac{3}{9^k} \leq U_{2k} \leq 2 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $2 - \dfrac{11}{8n} + \dfrac{3}{8n}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n \leq a_n \leq 2 + \dfrac{2}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ و $2 + \dfrac{2}{n} \leq b_n \leq 2 + \dfrac{25}{8n} - \dfrac{3}{8n}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ثم حدد نهاية كل من المتتاليتين $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$

التمرين الرابع

1) بين أن $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{(k+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{k^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$

2) نعتبر المتتالية $(S_n)_n$ المعرفة بما يلي : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \quad (\forall n \geq 1)$

أ- بين أن $(S_n)_n$ مكبورة بالعدد 3

ب- بين أن $(S_n)_n$ متقاربة أن نهايتها l تنتمي إلى المجال $[2,3]$

التمرين الخامس

لتكن $(U_n)_n$ متتالية حسابية أساسها r . نضع $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

1) بين أن $2S_{3n} = 3S_{2n} + 3n^2 r$

2) استنتج أن $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$

التمرين السادس

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$ المعرفتين بما يلي : $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2}$ و $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1) بين أن $\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{2}$

2) بين أن $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 \leq n^4 \quad (\forall n \geq 1)$

3) أ- بين أن $t - \frac{t^3}{3} \leq \arctan t \leq t \quad (\forall t > 0)$

ب- بين أن $V_n - \frac{1}{3n^2} \leq U_n \leq V_n \; : \; (\forall n \geq 1)$

ج- استنتج أن $(U_n)_{n\geq1}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين السابع

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 6x + 1)$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

1) بين أن المعادلة $x^3 - 3x + 1 = 0$ تقبل في المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ حلا وحيدا α

2) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تكافئ المعادلة $x^3 - 3x + 1 = 0$

3) أ- بين أن $x \leq f(x) \; : \; (\forall x \in [0, \alpha])$

ب- بين أن $0 \leq U_n \leq \alpha \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثامن

ليكن n عددا طبيعيا . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n + 5x - 1$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز β_n

2) أ- أحسب β_0 , β_1 ; β_2

ب- بين أن $0 \leq \beta_n \leq \frac{1}{5} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} (\beta_n)^n$

3) أ- بين أن $f_{n+1}(x) < f_n(x) \quad (\forall x \in]0,1])$

ب- استنتج أن المتتالية $(\beta_n)_n$ تزايدية

ج- استنتج أن المتتالية $(\beta_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها