# ~ الثانية علوم رياضية ~

# سلسلة المتتاليات (2)

**التمرين 1**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \leq u_n \leq 3$

2) نعتبر المتتاليتين $(v_n)$ و $(w_n)$ المعرفتين بما يلي :

$v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

بين أن : $v_{n+1} = 2 + \frac{v_n}{1+2v_n}$ و $w_{n+1} = 2 + \frac{w_n}{1+2w_n}$ و $w_n = 2 + \frac{1}{v_n}$

3) أ. أثبت أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \leq w_n$

ب. أدرس رتابة كل من المتتاليتين $(v_n)$ و $(w_n)$

4) أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{25}(w_n - v_n)$

ب. استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n - v_n)$

ج. بين أن المتتاليتان $(v_n)$ و $(w_n)$ متحاديتان و حدد نهايتهما

5) نضع $\alpha = 1 + \sqrt{2}$

أ. حدد عددا حقيقيا $k$ بحيث : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$

ب. استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و حدد نهايتها

**التمرين 2**

نعتبر الحدودية $P_n$ المعرفة بما يلي : $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ........ + x - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

1) بين أنه $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \quad (\exists! \varepsilon_n \in ]0,1[) \quad P_n(\varepsilon_n) = 0$

2) بين أن المتتالية $(\varepsilon_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعا

3) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \quad 2\varepsilon_n - (\varepsilon_n)^{n+1} - 1 = 0$

4) بين أن المتتالية $(\varepsilon_n)_{n \geq 2}$ متقاربة

5) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n$

**التمرين 3**

لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث : $f([a;b]) \subset [a;b]$

نفترض أنه : $(\exists k \in [0;1[) \quad (\forall x \in ]a;b[) \quad |f'(x)| \leq k$

1) بين أنه : $(\exists! \alpha \in [a;b]) \quad f(\alpha) = \alpha$

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0 \in [a;b]$ و $u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

أ. بين أن : $a \le u_n \le b \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب. بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج. استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$

3) تطبيق : نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0 \in [3;4]$ و $u_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

حدد نهاية المتتالية $(u_n)$

つづく