

~ الثانية علوم رياضية ~  
سلسلة المتتاليات

التمرين 1

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 4}$

ونعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. أدرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}^+$

ب. بين أن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha \in \left] \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right[$

ج. بين أن :  $(\forall (x, y) \in [0, 1]^2) : |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$

2. بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

3. أ. بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

ب. استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و أحسب نهايتها

4. نضع  $w_n = u_{2n+1}$  و  $v_n = u_{2n}$

أ. بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n < \alpha < v_n$

ب. أدرس رتبة  $(v_n)$  و  $(w_n)$

5. أ. بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} - w_{n+1} \leq \frac{1}{4} (v_n - w_n)$

ب. بين أن  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متحاديتان و حدد نهايتهما المشتركة

التمرين 2

لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي :  $f_n(x) = 3x^n - x - 1$

1. أ. بين أن  $f_n$  تزايدية على  $\left[ n\sqrt{\frac{1}{3n}}, +\infty \right[$  و تناقصية على  $\left] 0, n\sqrt{\frac{1}{3n}} \right[$

ب. ضع جدول تغيرات  $f_n$  و استنتج إشارتها

2. بين أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $u_n$  في المجال  $[0, +\infty[$

3. أحسب  $f_n(1)$  و استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$

4. أ. بين أن :  $(\forall x \in ]0, 1[) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$

ب. استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية

ج. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

5. نضع  $\lim u_n = l$

أ. بين أن :  $0 \leq l \leq 1$

ب. بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \leq l$

ج. بين أن :  $l = 1$

つづく