سلسلة المتتاليات العددية

التمرين الأول

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$\begin{cases} U_0 = 1 \quad ; \quad U_1 = 3 \\ U_{n+2} = 8U_{n+1} - 7U_n \end{cases}$ و نضع $V_n = U_{n+1} - U_n$

1) أحسب U_2 و V_2

2) بين أن $(V_n)_n$ هندسية و أحسب V_n بدلالة n

3) أحسب بدلالة n الجمع $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} V_k$

و استنتج U_n بدلالة n لكل $n \geq 2$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بمايلي :

$U_0 = 1$ و $U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+U_n}$

1) أحسب الحدود U_1 , U_2 , U_3

2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq \dfrac{3}{2}$

3) بين ان $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |U_{n+1} - U_n| \leq \dfrac{1}{4}|U_n - U_{n-1}|$

4) نضع $x_n = U_{2n}$ و $y_n = U_{2n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

أ) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_n = 1 + \dfrac{1}{1+x_n}$

ب) بين ان $x_n \leq y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج) أدرس رتابة كل من $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$

د) بين ان $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$ متحاديتان

5) أ) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |U_{n+1}\sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{4}|U_n - \sqrt{2}|$

ب) بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{9(x-1)}$

و نعتبر المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ المعرفتين بما يلي :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1) بين ان $(u_n)_n$ تزايدية و $(v_n)_n$ تناقصية

2) أ) بين أن $2 \leq u_n \leq 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن $2 \leq v_n \leq 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) أ) نضع $I = [2,3]$. بين أن :

$(\forall (x,y) \in I^2) \quad |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}|x-y|$

ب) استنتج أن $|v_n - u_n| \leq 3^{-\frac{n}{3}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج) بين ان $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متحاديتان أن نهايتهما l

حل للمعادلة $x^3 - 9x + 9 = 0$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$U_{n+1} = \dfrac{2U_n^2 + 2U_n + 1}{2U_n + 1}$ و $U_0 = a$

1) نفترض أن $a > 0$

أ- بين ان $U > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن $U_{n+1} \geq U_n + \dfrac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- استنتج أن $U_n \geq a + \dfrac{n}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

د- أحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

2) نفترض أن $a \leq -1$

أ- بين أن $U_n \leq -1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

ج- استنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها

التمرين الخامس

ليكن a عددا حقيقيا لا ينتمي للمجال $[0,1[$ و نعتبر

المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = U_n + E(U_n) \end{cases}$

1) بين أن $E(U_n) = 2^n E(a) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) استنتج حسب قيم a نهاية المتتالية $(U_n)_n$

التمرين السادس

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^k} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$

1) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad U_n-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{n}\left(U_n-\frac{n}{n^n}\right)$

2) استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad U_n=\frac{n}{n^2-1}-\left(\frac{n^2}{n^2-1}\times\left(\frac{1}{n}\right)^n\right)$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty}U_n$

التمرين السابع

حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$ في كل من الحالات التالية :

$U_n=\frac{n+\sin\left(n^2\right)}{n+\cos n}$ ، $U_n=\left(\frac{\sin 2n}{3}\right)^n$ ، $U_n=n\left(\sin\left(\frac{na+1}{n}\right)-\sin a\right)$ و $a\in\mathbb{R}^*$

$U_n=n\arctan n-\frac{n^2}{n+1}\arctan\left(n+1\right)$ ، $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^2+k}$ ، $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{\sqrt{n^3+k}}$

$U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$ ، $U_n=\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)......\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$

التمرين الثامن

لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$

نعتبر المتتاليتين $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^2}$ و $v_n=\sum_{k=1}^{k=n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ $v_n=\sum_{k=1}^{k=n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n و نضع

$W_n=V_n-U_n$

1) بين أن $\left|f\left(x\right)-x\right|\leq\frac{1}{2}x^2 \quad \left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

2) أ) بين أن $\left|W_n\right|\leq\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{k=n}k^2 \quad \left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

ب) استنتج أن $\left|W_n\right|\leq\frac{1}{2n} \quad \left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ و حدد $\lim_{n\to+\infty}V_n$

التمرين التاسع

1) أ) بين ان $\left(1+a\right)^n\geq\frac{n\left(n-1\right)}{2}a^2 \quad \left(\forall a>0\right)\left(\forall n>2\right)$

ب) استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

2) حدد نهاية كل من المتتاليتين $U_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n}}$ و $V_n=\sqrt[n]{1^2+2^2+.......+n^2}$