I. تقديم الدالة $f(x)=\ln(x)$ (اللوغاريتم النيبري):

01. تقديم الدالة اللوغاريتم النيبري :

❖ **نشاط :**

لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب : $f:\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x)=\frac{1}{x}$$

1) هل f تقبل دالة أصلية على المجال $]0,+\infty[$ ؟ علل جوابك

2) كم توجد من دالة أصلية F ل f حيث $F(1)=0$ ؟

❖ **مفردات:**

الدالة الأصلية F للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ حيث $F(1)=0$

- نرمز لها ب $F(x)=\ln(x)$
- الدالة F تسمى الدالة اللوغاريتم النيبري

❖ **تعريف :**

الدالة الأصلية F للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 (أي $F(1)=0$) تسمى الدالة اللوغاريتم النيبري و يرمز لها ب $F(x)=\ln(x)$

❖ **ملحوظة:**

بدلا من كتابة : $F(x)=\ln(x)$ نكتب : $f(x)=\ln(x)$

❖ **نتائج:**

- الدالة $f(x)=\ln(x)$ مجموعة تعريفها هي $D_f=]0,+\infty[$
- $f(1)=\ln(1)=0$
- الدالة $f(x)=\ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=[\ln(x)]'=\frac{1}{x}>0$
- إذن الدالة $f(x)=\ln(x)$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall a,b\in\ ]0,+\infty[\ ,\ a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$.
- $\forall a,b\in\ ]0,+\infty[\ ,\ a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$.

01. إشارة $\ln(x)$ هي كما يلي:

إشارة $\ln(x)$: نعلم أن : $\ln(1)=0$

لدينا : 1) $x>1 \Rightarrow \ln(x)>0$

2) $0<x<1 \Rightarrow \ln(x)<0$

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	−	0	+	

تطبيق:

1) مجموعة تعريف الدالة أ - $f(x)=\dfrac{2}{\ell n(x)}$. ب - $f(x)=\sqrt{\ell n(x)}$

2) حل المعادلة: $\ell n(2x)-\ell n(x-1)=0$

3) حل المتراجحة: $\ell n(2x)-\ell n(x-1)\leq 0$

02. المشتقة اللوغاريتمية لدالة:

❖ تعريف و خاصية:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $\forall x\in I : u(x)\neq 0$.

الدالة: $f(x)=\ell n|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=\left[\ell n|u(x)|\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ (أي المشتقة اللوغاريتمية ل u على I).

الدالة $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I.

❖ برهان:

لدينا : u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن u متصلة على I . بما أن : $\forall x\in I : u(x)\neq 0$ إذن $u(x)<0$ و إما $u(x)>0$.

- حالة : $u(x)>0$ ومنه : $f(x)=\ell n|u(x)|=\ell n(u(x))$

بمأن $u(x)>0$ إذن $u(I)\subset\left]0,+\infty\right[$ ومنه الدالة $x\to\ell n(x)$ قابلة للاشتقاق على $u(I)$

ومنه :
$$I\xrightarrow{u}u(I)\xrightarrow{\ell n}\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow u(x)\longrightarrow\ell n(u(x))=\ell n\circ u(x)$$

إذن: f قابلة للاشتقاق لأنها مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق ومنه:

$$f'(x)=\left[\ell n|u(x)|\right]'=\left[\ell n(u(x))\right]'=\left[\ell n\circ u(x)\right]'=u'(x)\times\ell n'\circ u(x)=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

- حالة : $u(x)<0$ ومنه : (بنفس الطريقة نبرهن على ذلك)

❖ مثال :

نحسب : f' مع $f(x)=\left[\ell n|x^2-x|\right]$

لدينا: $f'(x)=\left[\ell n|x^2-x|\right]'=\dfrac{(x^2-x)'}{x^2-x}=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$

❖ مثال:

لنعتبر الدالة : $u(x)=3x^2-5x$

أوجد الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u.الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u هي الدالة: $x\to\dfrac{6x-5}{3x^2-5x}$

❖ استنتاج

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I حيث $\forall x\in I\ :\ u(x)\neq 0$

الدوال الأصلية للدالة: $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال التي على شكل $F(x)=\ell n|u(x)|+c$ مع $(c\in\mathbb{R})$.

❖ تمرين :

- أوجد الدوال الأصلية للدالة: $f(x)=\frac{5}{x-2}$ على $]2,+\infty[$

03. الخاصيات الجبرية:

❖ خاصيات:

لكل a و b من $]0,+\infty[$

- $\ell n(a\times b)=\ell n(a)+\ell n(b)$
- $\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$
- $\ell n\left(\frac{a}{b}\right)=\ell n(a)-\ell n(b)$
- $\ell n(a^{r})=r\times\ell n(a)$ مع $r\in\mathbb{Q}$
- نستنتج : $\ell n(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\times\ell n(a)$ و $\ell n(\sqrt[3]{a})=\frac{1}{3}\times\ell n(a)$

❖ نبرهن على: $\ell n(a\times b)=\ell n(a)+\ell n(b)$.

نعتبر $a>0$ (معلوم) و الدالة : $f(x)=\ell n(ax)$ ثم الدالة $g(x)=\ell n(a)+\ell n(x)$. ومنه $f(1)=\ell n(a)$ (1) و $g(1)=\ell n(a)$ (2)

- f و g معرفتين على $]0,+\infty[$.
- $f'(x)=[\ell n(ax)]'=\frac{(ax)'}{ax}=\frac{1}{x}$ و $g'(x)=[\ell n(a)+\ell n(x)]'=\frac{1}{x}$ ومنه : $f'(x)=g'(x)$ إذن :

$(f(x)-g(x))'=0$ و بالتالي $f(x)-g(x)=c$ مع $c\in\mathbb{R}$ إذن $f(x)=g(x)+c$ (3)

نأخذ $x=1$ و منه $f(1)=g(1)+c$ و حسب (1) و (2) نحصل على $c=0$ و بالتالي $f(x)=g(x)$ حسب (3).

إذن : $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\ell n(ax)=\ell n(a)+\ell n(x)$ وذلك لكل $x\in]0,+\infty[$ نأخذ $x=b$ نحصل على $\ell n(ab)=\ell n(a)+\ell n(b)$.

خلاصة : $\ell n(ab)=\ell n(a)+\ell n(b)$: $\forall a,b\in]0,+\infty[$

❖ نبرهن على: $\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$.

نأخذ : $b>0$ لدينا:

$$\ell n(1)=0\Leftrightarrow\ell n\left(\frac{b}{b}\right)=0\Leftrightarrow\ell n\left(b\times\frac{1}{b}\right)=0\Leftrightarrow\ell n(b)+\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=0\Leftrightarrow\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$$

خلاصة: $\ell n\left(\frac{1}{b}\right)=-\ell n(b)$.

❖ نرهن على: $\ell n(a^{r})=r\times\ell n(a)$ مع $r\in\mathbb{Q}$

بنفس الطريقة المستعمل في البرهان $\ell n(a\times b)=\ell n(a)+\ell n(b)$ مع اعتبار الدالة $f(x)=\ell n(x^{r})$ و الدالة $g(x)=r\ell n(x)$

❖ تطبيق:

- نضع : $\ell n(2) \simeq 0,69$. أحسب : $\ell n(4)$ و $\ell n(8)$
- بسط : $\ell n(\sqrt{3}) + \ell n(9)$
- بسط : $\ell n\left[(\sqrt{5})^{2012}\right] - \ell n(\sqrt{5})$

❖ ملحوظة:

الكتابة : $\ell n(x) \times \ell n(x) = \ell n^2(x)$

الكتابة : $\ell n(x) \times \ell n(x) \times \ell n(x) = \ell n^3(x)$

بصفة عامة : $\underbrace{\ell n(x) \times \ell n(x) \times \cdots \times \ell n(x)}_{n} = \ell n^n(x)$ $n \in \mathbb{N}^*$

❖ تطبيق: بسط : $\ell n^2(3-\sqrt{2}) - \ell n^2(3+\sqrt{2})$

04. نهايات اعتيادية :

❖ خاصيات:

الدالة: $f(x) = \ell n(x)$ معرفة على $D_f =]0,+\infty[$ إذن:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n(x) = -\infty$ ومنه الدالة f تقبل مقارب عمودي معادلته: $x = 0$ (اي محور الأراتيب)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n(x) = +\infty$ (ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n(x)}{x} = 0$ ومنه $a = 0$ إذن الدالة f تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \times \ell n(x) = 0^-$

❖ برهان ل : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n(x) = +\infty$

ليكن $A > 0$ نعتبر n أصغر عدد صحيح طبيعي حيث $n\ell n(2) > A$ إذن $n \geq E\left(\dfrac{A}{\ell n 2}\right) + 1$.

ومنه :

إذا كان : $x > 2^n$ فإن : $x > 2^n \Rightarrow \ell n(x) > \ell n(2^n)$

$\Rightarrow \ell n(x) > n\ell n(2)$

$\Rightarrow \ell n(x) > A \;;\; (n\ell n(2) > A)$

ومنه : $\forall A > 0 , \exists B=2^n > 0 , x>B \Rightarrow \ell n(x) > A$.

خلاصة : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n(x) = +\infty$.

❖ برهن على : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n(x) = -\infty$ (يمكنك أن تضع $X = \dfrac{1}{x}$).

❖ برهن على : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n(x)}{x} = 0$

1. يمكنك اعتبار الدالة $f(x)=2\sqrt{x}-\ln(x)$. ثم ادرس رتابة f على $[1,+\infty[$

2. استنتج : $\frac{2}{\sqrt{x}} \geq \frac{\ln(x)}{x} \geq 0$ ثم النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$.

❖ نبرهن على : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\times\ln(x)=0^-$.

نضع : $X=\frac{1}{x}$ ومنه : $x\to0^+$ فإن $X\to+\infty$.

إذن :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\times\ln(x) &= \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\times\ln\left(\frac{1}{X}\right)\\ &= \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\times(-\ln X)\\ &= \lim_{X\to+\infty}\frac{-\ln X}{X}\\ &= 0\end{aligned}$$

خلاصة : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\times\ln(x)=0^-$

❖ تطبيق: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}$

05. نهايات ضرورية معرفتها :

❖ خاصيات:

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\times\ln(x)=0^-$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$; $n\in\mathbb{N}^*$

❖ نبرهن على $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$:

1. ادرس اشتقاق الدالة $f(x)=\ln x$ في $x_0=1$.

2. استنتج نهاية : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}$.

❖ نبرهن على $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ يمكنك استعمال نفس الطريقة مع $f(x)=\ln(x+1)$ و $x_0=0$

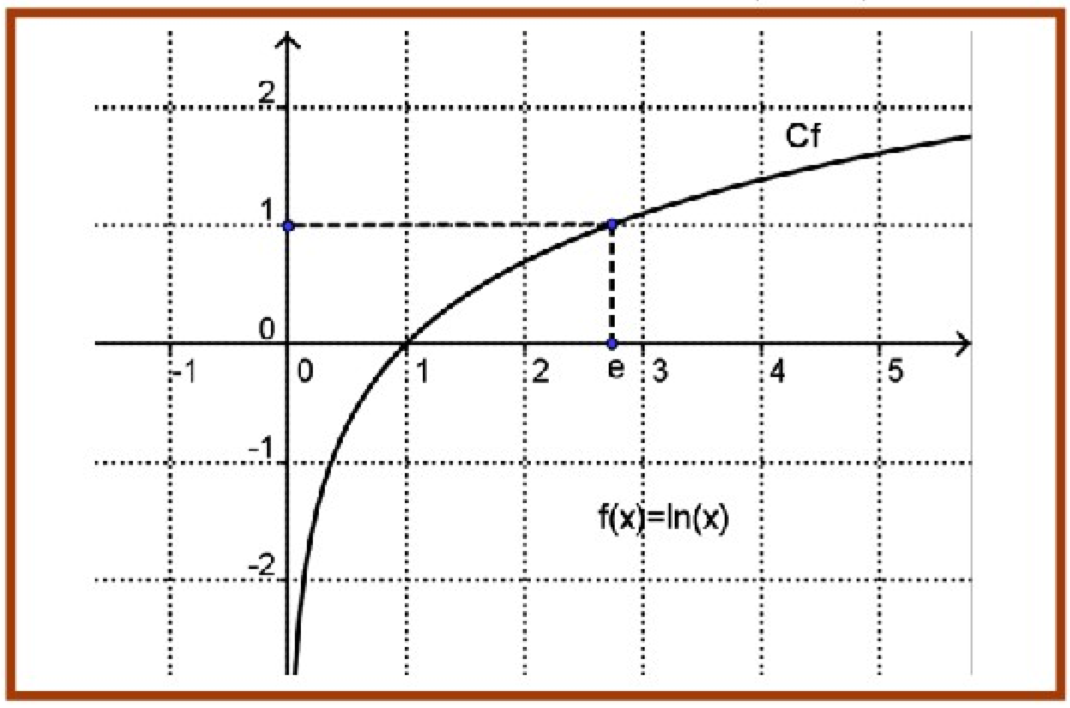
❖ تطبيق: أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x\times\ln(x)}$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x^3}$

06. دراسة الدالة $f(x)=\ln(x)$:

- حسب ما سبق نستنتج: جدول تغيرات f

x	0		1		$+\infty$
f'	||		$+$		
f	||	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$	

- إنشاء منحنى الدالة: f في م. م. م $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$



❖ نتائج:

- الدالة $f(x)=\ell n(x)$ متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- f تقابل من $]0,+\infty[$ إلى $]-\infty,+\infty[$ $f\left(]0,+\infty[\right)=]-\infty,+\infty[$
- المعادلة $f(x)=1$ (أي $\ell n(x)=1$) تقبل حلا وحيدا على $]0,+\infty[$ ونرمز لهذا الحل ب: e مع $(e\simeq 2,718)$ عدد اللاجذري
- $\forall r\in\mathbb{Q}: r=\ell n\left(e^{r}\right)$.

❖ مثال:

$$3=\ell n\left(e^{3}\right) \quad \text{و} \quad -\frac{2}{7}=\ell n\left(e^{-\frac{2}{7}}\right)$$

❖ تطبيق:

حدد مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\dfrac{1}{3-\ell n(x)}$

II. دالة اللوغاريتم للأساس a مع: $a\in\ ]0,1[\cup]1,+\infty[$

❖ تعريف:

ليكن a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (a عدد موجب قطعا و $a\neq 1$)

الدالة المعرفة كما يلي: $f\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$$x\to f(x)=\frac{\ell n(x)}{\ell n(a)}$$

تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها ب $\log_a$.

❖ نتائج:

- $\log_a(x)=\frac{\ell n(x)}{\ell n(a)}$ و $\log_a(1)=\frac{\ell n(1)}{\ell n(a)}=0$
- $\log_a(a)=\frac{\ell n(a)}{\ell n(a)}=1$
- $\log_a(e)=\frac{\ell n(e)}{\ell n(a)}=\frac{1}{\ell n(a)}$

❖ ملحوظة:

$\log_e(x)=\frac{\ell n(x)}{\ell n(e)}=\ell n(x)$ إذن $\log_e=\ell n$

❖ خاصيات:

لكل x و y من $]0,+\infty[$ و $a\in\,]0,1[\cup]1,+\infty[$

- $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$
- $\log_a(x^r)=r\times\log_a(x)$ مع $r\in\mathbb{Q}$
- $\log_a(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\times\log_a(x)$ و $\log_a(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{3}\times\log_a(x)$

❖ نبرهن على: $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

لدينا: $\log_a(x\times y)=\frac{\ell n(x\times y)}{\ell n(a)}=\frac{\ell n(x)+\ell n(y)}{\ell n(a)}=\frac{\ell n(x)}{\ell n(a)}+\frac{\ell n(y)}{\ell n(a)}=\log_a(x)+\log_a(y)$

إذن: $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

❖ ملحوظة:

- في حالة : $a=10$ الدالة : $f(x)=\log_{10}(x)$ تسمى الدالة اللوغاريتم العشري ويرمز لها باختصار: $f(x)=\text{Log}(x)$ إذن: $\log_{10}=\text{Log}$. (لدينا : $\log_{10}(x)=\text{Log}(x)\simeq 0,43\ell n(x)$)
- $\text{Log}(1)=0$; $\text{Log}(10)=1$; $\text{Log}(10^r)=r$;
- التمثيل المبياني ل $f(x)=\log_a(x)$. نأخذ: $a=2$ و $a=\frac{1}{2}$.

❖ تمارين تطبيقية :

بسط التعابير التالية:

1) $\log_2(8)-\log_2\left(\sqrt[3]{32}\right)+\log_2(9)-\log_2(3)$.

2) $\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_3\left(\frac{4}{5}\right)$.

3) $\log(100)-\log\left(10^{2013}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$.

4) بين أن: $\forall a,b\in\left]1,+\infty\right[\ \log_b(a)=\frac{1}{\log_a(b)}$.

5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$.

6) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\log_{\sqrt{3}}(3x-1)\geq\log_{\sqrt{3}}(x+1)$

7) أدرس الدالة : $f(x)=\log_5(x+1)$