تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الدوال اللوغارتمية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$f(x)=\ln(x^2+2x)$	$Df=\{x\in IR /\ x^2+2x>0\}=\{x\in IR /\ x(x+2)>0\}=]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$
$g(x)=\ln(x^2-2x+5)$	$Dg=\{x\in IR /\ x^2-2x+5>0\}=IR$ لأن : $\Delta=4-20<0$
$h(x)=\ln(5-x)+\ln(x^2-3)$	$Dh=\{x\in IR / 5-x>0 \ \ et \ \ x^2-3>0\}=\{x\in IR / 5-x>0 \ \ et \ \ x^2>3\}$ $=\{x\in IR / x<5 \ \ et \ \ (x>\sqrt3 \ \ ou \ \ x<-\sqrt3)\}$ $=\{x\in IR / (x<5 \ \ et \ \ x>\sqrt3) \ \ ou \ \ (x<5 \ \ et \ \ x<-\sqrt3)\}$ $Dh=]\sqrt3;5[\cup]-\infty;-\sqrt3[=]-\infty;-\sqrt3[\cup]\sqrt3;5[$
$p(x)=\dfrac{3}{1-\ln(x)}$	$Dp=\{x\in IR /\ x>0 \ et \ 1-\ln x\neq 0\}=\{x\in IR /\ x>0 \ et \ \ln x\neq 1\}$ $=\{x\in IR /\ x>0 \ et \ \ln x\neq \ln e\}=\{x\in IR /\ x>0 \ et \ x\neq e\}$ $Dp=]0;e[\cup]e;+\infty[$

تمرين 2 :

$\ln(x^2+2x)=0$	مجموعة صلاحية المعادلة هي : $D=]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ الآن : $\ln(x^2+2x)=0 \Leftrightarrow \ln(x^2+2x)=\ln 1 \Leftrightarrow x^2+2x=1 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0$ بعد حساب المحددة نجد : $\Delta=4+4=8 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-2+\sqrt8}{2}=\dfrac{-2+2\sqrt2}{2}=-1+\sqrt2\approx 0{,}41\in D \\ x_2=\dfrac{-2-\sqrt8}{2}=\dfrac{-2-2\sqrt2}{2}=-1-\sqrt2\approx -2{,}41\in D\end{cases}$ إذن : $\boxed{S=\{-1+\sqrt2 \ ; -1-\sqrt2\}}$
	قبل إنجاز المعادلات أو المتراجحات يجب تحديد مجموعة صلاحية المعادلة وبعد إيجاد الحلول يجب التحقق من الحلول التي تنتمي لمجموعة الصلاحية ، طريقة الجواب أعلاه تمثل اختصارا لهذه الطريقة باستعمال الرموز الرياضية ، و قد استعملنا خلالها نتيجة 1 من التمرين السابق. أخيرا استعملنا تقريبا للحلول لنستطيع أن نحدد الحلول التي تنتمي لمجموعة لصلاحية المعادلة $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ (وجدنا كلا الحلين ينتمي لمجموعة الصلاحية)
$\ln(x^2-3)=\ln(2x)$	$D=\{x\in IR/\ x^2-3>0 \ \ et \ 2x>0\}=\{x\in IR/\ x^2>3 \ \ et \ \ x>0\}$ $D=\{x\in IR/\ x>\sqrt3\}=]\sqrt3;+\infty[$ $\ln(x^2-3)=\ln(2x) \Leftrightarrow x^2-3=2x \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$ $\Delta=4+12=16 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{2+4}{2}=3\in D \\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=-1\notin D\end{cases}$ بالتالي : $\boxed{S=\{3\}}$
$\ln(x^2+1)=1$	$D=\{x\in IR/\ x^2+3>0\}=IR$ $\ln(x^2+1)=1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1)=\ln(e) \Leftrightarrow x^2+1=e$ $\ln(x^2+1)=1 \Leftrightarrow x^2=e-1$ بالتالي : $\boxed{S=\{\sqrt{e-1}\ ,-\sqrt{e-1}\}}$ $\ln(x^2+1)=1 \Leftrightarrow x=\sqrt{e-1} \ \ ou \ \ x=-\sqrt{e-1}$

www.naja7math.com - رياضيات النجاح

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

$D=\{x\in IR/\ x+1>0\ \ et\ 2x>0\}=\{x\in IR/\ x>-1\ \ et\ \ x>0\}=]0;+\infty[$ $\ln(x+1)\geq\ln(2x)\Leftrightarrow x+1\geq 2x\Leftrightarrow x-2x\geq -1\Leftrightarrow -x\geq -1\Leftrightarrow x\leq 1$ بالتالي : $\boxed{S=]-\infty;1]\cap]0;+\infty[=]0,1]}$	2

تمرين 3 :

$\ln\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)=\ln\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)=\ln\left(\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)=\ln(\sqrt{2-1})=\ln(1)=0$ استعملنا الخاصية : $\ln(x)+\ln(y)=\ln(xy)$	1
$\ln(\sqrt{6})=\frac{1}{2}\ln(6)=\frac{1}{2}(\ln(2)+\ln(3))\approx\frac{0{,}7+1{,}1}{2}\approx 0{,}9$ $\ln\left(\frac{16}{9}\right)=\ln(16)-\ln(9)=\ln(2^4)-\ln(3^2)=4\ln(2)-2\ln(3)\approx 4\times 0{,}7-2\times 1{,}1\approx 2{,}8-2{,}2\approx 0{,}6$ $\ln(\sqrt[3]{12})=\frac{1}{3}\ln(12)=\frac{1}{3}\ln(2^2\times 3)=\frac{2\ln(2)+\ln(3)}{3}\approx\frac{1{,}4+1{,}1}{3}\approx\frac{2{,}5}{3}\approx 0{,}8$ استعملنا الخاصيات : $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$ و $\ln(x^r)=r\ln(x)$ و $\ln(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}\ln(x)$	2

تمرين 4 :

$\boxed{f(x)=\ln(2x+1)}$ $f'(x)=\frac{(2x+1)'}{2x+1}$ $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$	$\boxed{f(x)=\ln(7-x^2)}$ $f'(x)=\frac{(7-x^2)'}{7-x^2}$ $f'(x)=\frac{-2x}{7-x^2}$	$\boxed{f(x)=\ln(1+\ln(x))}$ $f'(x)=\frac{(1+\ln(x))'}{1+\ln(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln(x)}$

$\boxed{f(x)=\ln^3(x)}$ $f'(x)=3(\ln^2(x))(\ln(x))'$ $f'(x)=3\ln^2(x)\times\frac{1}{x}$	$\boxed{f(x)=x\ln(x)+\frac{\ln(\sqrt{x})}{x}}$ $f'(x)=(x\ln(x))'+\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x}\right)'$ $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}$ $f'(x)=\ln(x)+1+\frac{1-\ln(x)}{2x^2}$

من المستحسن استعمال خصائص دالة اللوغاريتم قبل الاشتقاق

للتذكير : $\ln(u(x))'=\frac{(u(x))'}{u(x)}$

تمرين 5 :

$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(2x)+\frac{1}{\ln(x)}=+\infty$ $(+\infty+0\to+\infty)$	$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x)}{x}+\ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right)=0+\ln(1)=0$ لأن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+5}{x^2+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$	1
$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\mapsto+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-\infty$	$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}+\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0+0=0$	

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}-1=0-1=-1$

لأن: لكل $r>0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^r}=0$ ، $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+2}\times\frac{\ln(x)}{x}=2\times0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln^2(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln^2(x)}{x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\left[\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right]^2-1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\ln(2x)+\frac{1}{\ln(x)}=-\infty\ (-\infty+0)$$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}+\ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right)=\ln(5)$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty\quad\left(\frac{-\infty}{0^+}\to-\infty\right)$

2

$\lim_{x\to0^+}x\ln(x)-x=0-0=0$ باستعمال النهاية الخاصة : $\lim_{x\to0^+}x\ln(x)=0$

$$\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)+\sqrt{x}\ln(x)=\lim_{x\to0^+}x\times[x\ln(x)]+\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)=\lim_{x\to0^+}x\times[x\ln(x)]+2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)=0\times0+2\times0=0$$

$\lim_{x\to2}\frac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2}=\ln'(2)=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to0^+}\ln(x)\ln(x+1)=\lim_{x\to0^+}x\ln(x)\frac{\ln(x+1)}{x}=0\times1=0$

تمرين 6 :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}=2\qquad\left(\frac{0}{+\infty}\to0\right)$$

$\lim_{x\to+\infty}\ln(2x+3)-\ln(x+5)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+3}{x+5}\right)=\ln(2)$ (لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$)

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to3}\frac{x}{x-3}(\ln(x)-\ln(3))=\lim_{x\to3}x\frac{\ln(x)-\ln(3)}{x-3}=3\times\ln'(3)=3\times\frac{1}{3}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(x^3+7x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln\left(x(x^2+7)\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(x)+x\ln(x^2+7)=0+0\times\ln(7)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-\ln(x)}{2+\ln(x)}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x+2-2-\ln(x)}{2+\ln(x)}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x+2}{2+\ln(x)}-1=0-1=-1\qquad\left(\frac{2}{-\infty}\to0\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\ln(x)}-\sqrt[3]{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{\frac{\ln(x)}{x}}-1\right)=-\infty$$

لاحظ من خلال هذه الأمثلة أنه لا توجد طريقة محددة للتعامل مع نهايات دالة اللوغاريتم، عليك محاولة استثمار الأفكار من كل نهاية

رياضيات النجاح أ. سمير لخريسي
www.naja7math.com