# الدوال اللوغاريتمية

**تمرين 1**

حل في $\mathbb{R}$ :

-1 $\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x^2+2x-15)$

-2 $\ln|x+2|+\ln|x+3|=\ln|x^2+2x-15|$

-3 $\ln\left((x+2)(x+3)\right)=\ln(x^2+2x-15)$

-4 $\ln^2 x-7\ln x+6=0$

-5 $\ln\sqrt{x+4}-\ln\sqrt{x-1}=\ln\sqrt{x}$

**الحل**

-1 $(E_1)\quad \ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x^2+2x-15)$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D=]3;+\infty[$

$$\begin{aligned}(E_1)&\Leftrightarrow \ln\left((x+2)(x+3)\right)=\ln(x^2+2x-15)\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3)=x^2+2x-15\\ &\Leftrightarrow x=-7\end{aligned}$$

$-7\notin D$ إذن : $\boxed{S=\varnothing}$

-2 $(E_2)\quad \ln|x+2|+\ln|x+3|=\ln|x^2+2x-15|$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D=\mathbb{R}-\{-5;-3;-2;3\}$

$$\begin{aligned}(E_2)&\Leftrightarrow \ln\left(|x+2||x+3|\right)=\ln|x^2+2x-15|\\ &\Leftrightarrow |(x+2)(x+3)|=|x^2+2x-15|\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+5x+6=x^2+2x-15\\ ou\\ x^2+5x+6=-x^2-2x+15\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=-7\\ ou\\ x=-\dfrac{9}{2}\ ou\ x=1\end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\left\{-7;-\frac{9}{2};1\right\}}$$

-3 $(E_3)\quad \ln\left((x+2)(x+3)\right)=\ln(x^2+2x-15)$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D=]-\infty;-5[\cup]3;+\infty[$

$$\begin{aligned}(E_1)&\Leftrightarrow \ln\left((x+2)(x+3)\right)=\ln(x^2+2x-15)\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3)=x^2+2x-15\\ &\Leftrightarrow x=-7\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{S=\{-7\}}$

-4 $(E_4)\quad \ln^2 x-7\ln x+6=0$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D=]0;+\infty[$

$$\begin{aligned}(E_4)&\Leftrightarrow \ln^2 x-7\ln x+6=0\\ &\Leftrightarrow \ln x=1\ ou\ \ln x=6\\ &\Leftrightarrow x=e\ ou\ \ln\sqrt[6]{x}=1\\ &\Leftrightarrow x=e\ ou\ x=e^6\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{e;e^6\}}$$

**تمرين2**

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات :

-1 $\ln(x-1)\le 0$

-2 $\ln(x-1)-\ln(2x-4)>0$

-3 $\ln\dfrac{3x-1}{x-1}\ge 0$

**الحل**

-1 $(I_1)\quad \ln(x-1)\le 0$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D=]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}(I_1)\ &\Leftrightarrow\ \ln(x-1)\le 0\\ &\Leftrightarrow \ln(x-1)\le \ln 1\\ &\Leftrightarrow x-1\le 1\\ &\Leftrightarrow x\le 2\end{aligned}$$

$$\boxed{S=]1;2]}$$

-2 $(I_2)\quad \ln(x-1)-\ln(2x-4)>0$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D=]2;+\infty[$

$$\begin{aligned}(I_2)\ &\Leftrightarrow\ \ln(x-1)-\ln(2x-4)>0\\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right)>\ln 1\\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4}>1\\ &\Leftrightarrow x-1>2x-4\\ &\Leftrightarrow x<3\end{aligned}$$

$$S=]2;3[$$

-3 $(I_3)\quad \ln\dfrac{3x-1}{x-1}\ge 0$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}(I_3)\ &\Leftrightarrow\ \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right)>0\\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right)>\ln 1\\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4}>1\\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4}-1>0\\ &\Leftrightarrow \frac{-x+3}{2x-4}>0\end{aligned}$$

$$S=]2;3[\cap\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[\right)$$

$$\boxed{S=]2;3[}$$

**تمرين3**

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية :

-1 $\begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=1\\ \left(\ln(x)\right)^2+\left(\ln(y)\right)^2=13\end{cases}$

-2 $\begin{cases}3\ln(x^5)+\ln\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right)=6\\ \ln\left(\frac{1}{x^8}\right)+\ln(\sqrt[3]{y})=1\end{cases}$

-3 $\begin{cases}\ln(xy^2\sqrt{x})=10\\ \ln\left(\frac{x}{y\sqrt{y}}\right)=1\end{cases}$

**الحل**

-1 $(S_1)\quad \begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=1\\ \left(\ln(x)\right)^2+\left(\ln(y)\right)^2=13\end{cases}$

مجموعة تعريف النظمة هي : $D=\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}^{*+}$

$$\begin{aligned}(S_1)\ &\Leftrightarrow\ \begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=1\\ \left(\ln(x)\right)^2+\left(\ln(y)\right)^2=13\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=1\\ \left(\ln(x)\right)^2+\left(\ln(y)\right)^2=13\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=1\\ \ln(x)\ln(y)=6\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_1)\Leftrightarrow &\begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=1\\ \ln(x)\ln(y)=6\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=1\\ \left(\ln(x)\right)^2-\ln(x)-6=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}\ln(y)=\ln(x)-1\\ \ln(x)=-2\ \ ou\ \ \ln(x)=3\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_1)\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(y)=-3\\ \ln(x)=-2\end{cases}\ ou\ \begin{cases}\ln(y)=2\\ \ln(x)=3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{y}}\right)=1\\ \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=1\end{cases}\ ou\ \begin{cases}\ln(\sqrt{y})=1\\ \ln(\sqrt[3]{x})=1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}y=e^{-3}\\ x=e^{-2}\end{cases}\ ou\ \begin{cases}y=e^{2}\\ x=e^{3}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(e^{-2};e^{-3}\right);\left(e^{3};e^{2}\right)\right\}}$$

-2
$$(S_1)\quad\begin{cases}3\ln(x^5)+\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{y}}\right)=6\\ \ln\left(\dfrac{1}{x^8}\right)+\ln(\sqrt[3]{y})=1\end{cases}$$

مجموعة تعريف النظمة هي : $D=\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}^{*+}$

$$(S_1)\Leftrightarrow\begin{cases}3\ln(x^5)+\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{y}}\right)=6\\ \ln\left(\dfrac{1}{x^8}\right)+\ln(\sqrt[3]{y})=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}15\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(y)=6\\ -8\ln(x)+\dfrac{1}{3}\ln(y)=1\end{cases}$$

$$(S_1)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x)=\dfrac{5}{2}\\ \ln(y)=63\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^{\frac{5}{2}}\\ y=e^{63}\end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(e^{\frac{5}{2}};e^{63}\right)\right\}}$$

## تمرين4

$a$ و$b$ عددان حقيقيان موجبان قطعا

بحيث : $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)=\ln\sqrt[6]{a}+\ln\sqrt[6]{b}$

بين أن : $\dfrac{a}{b}+2=3\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

## الحل

$$(E)\quad\frac{1}{3}\ln\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\ln\sqrt[6]{a}+\ln\sqrt[6]{b}$$

$$(E)\Leftrightarrow\frac{1}{3}\ln\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\ln\sqrt[6]{a}+\ln\sqrt[6]{b}\,\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(\sqrt[6]{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2}\right)=\ln\sqrt[6]{ab}$$

$$(E)\Leftrightarrow\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2=ab$$

$$\Leftrightarrow a+2b=3\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+2b}{b}=\frac{3\sqrt{ab}}{b}$$

$$\boxed{(E)\Leftrightarrow\frac{a}{b}+2=3\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

## تمرين5

احسب النهايات التالية :

-1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^5}{x^2}=$

-2 $\lim\limits_{x\to0^+}x^3(\ln x)^2$

-3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$

-4 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}$

-5 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\ln(x^2+1))$

## الحل

-1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^5}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^5}{\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^5}$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{2}{5}}}\right)^5$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^5}{x^2}=0}$$

-2

$$\lim_{x\to0^+}x^3(\ln x)^2=\lim_{x\to0^+}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2(\ln x)^2$$

$$\lim_{x\to0^+}x^3(\ln x)^2=\left(\lim_{x\to0^+}x^{\frac{3}{2}}\ln x\right)^2$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}x^3(\ln x)^2=0}$$

-3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}}=0\times1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}}=0}$$

-4

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{2x}\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(t+1)}{t}\lim_{x\to0^+}2\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}=1\times0$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}}=0}$$

-5

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(x^2+1))=\lim_{x\to+\infty}(\ln(x^2+1)-x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}-\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(x^2+1))=+\infty(0-1)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(x^2+1))=-\infty}$$

## تمرين6

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]-\infty;0[$ بما يلي :

$$g(x)=x+1+\ln(-x)$$

بين أن : $\forall x\in\,]-\infty;0[\;:\;g(x)\le0$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases}f(x)=x^2+2x\ln(-x) & x\in\,]-\infty;0[\\ f(0)=0\end{cases}$$

1- بين أن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2- أ- بين أن : $f$ متصلة في $0$

3- بين أن : $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

أول النتيجة هندسيا .

4- ادرس رتابة $f$

5- بين أن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

أول النتيجة هندسيا .

6- أ- بين أن $(C_f)$ يقبل النقطة ذات الأفصول $-1$ نقطة انعطاف

ب- حدد معادلة المماس ل $(C_f)$ عند النقطة ذات الأفصول $-1$

7- ضع جدول تغيرات $f$ ثم أنشئ التمثيل المبياني ل $f$ على معلم متعامد ممنظم

## الحل

I - نعتبر $x$ من $]-\infty;0[$

$$g(x)=x+1+\ln(-x)$$

$$g'(x)=\frac{x+1}{x}$$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $-1$ $\qquad$ $0$ |
|---|---|
| $g(x)$ | $\nearrow$ $g(-1)$ $\searrow$ |

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\forall x\in\,]-\infty;0[\;:\;g(x)\le g(-1)$$

بما أن : $g(-1)=0$

فإن : $\boxed{\forall x\in\,]-\infty;0[\;:\;g(x)\le0}$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases}f(x)=x^2+2x\ln(-x) & x\in\,]-\infty;0[\\ f(0)=0\end{cases}$$

-1

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2+2x\ln(-x)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}t^2-2t\ln(t)$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}t^2\left(1-2\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

بما أن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$ فإن

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty(1-0)$$ :

إذن: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

2- أ-

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x^2+2x\ln(-x)$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{t\to0^+}t^2-2t\ln(t)$$

بما أن : $\lim_{t\to0^+}t\ln(t)=0$ فإن :

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=0-0$$

و منه : $\boxed{\lim_{x\to0^-}f(x)=0}$

و لدينا : $f(0)=0$

إذن: $\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)$

إذن: $\boxed{f \text{ متصلة في } 0}$

-3 $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x\ln(-x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}x+2\ln(-x)$$
$$=0-\infty$$

إذن: $$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty}$$

و منه : $(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى يسار النقطة ذات الأفصول $0$

-4 رتابة $f$

$$f'(x)=2g(x) \qquad x\in\left]-\infty;0\right[$$

بما أن : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[ \; : g(x)\le 0$

فأن : $f$ تناقصية على المجال $\left]-\infty;0\right[$

-5 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x\ln(-x)}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}x+2\ln(-x)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-t+2\ln(t)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}t\left(-1+2\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

و لدينا : $$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$$

إذن: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty(-1+0)$$

إذن: $$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty}$$

و منه : $\boxed{\text{محور الأراتيب اتجاه مقارب ل } (C_f) \text{ بجوار } -\infty}$

-6 أ- لدينا : $f'(x)=2g(x) \qquad x\in\left]-\infty;0\right[$

إذن: $f''(x)=2g'(x) \qquad x\in\left]-\infty;0\right[$

و حسب I- : $g'(-1)=0$ و $g'(x)$ تتغير إشارتها بجوار $-1$

إذن: $f''(-1)=0$ و $f''(x)$ تتغير إشارتها بجوار $-1$

و منه : $(C_f)$ يقبل النقطة ذات الأفصول $-1$ نقطة انعطاف

ب- لدينا : $f(-1)=1$ و $f'(-1)=0$

إذن: $y=1$ هي معادلة المماس ل $(C_f)$ عند النقطة ذات الأفصول $-1$

-7جدول تغيرات $f$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $0$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ $\searrow$ $0$ |

إنشاء $(C_f)$


( الوحدة $2cm$ )

**تمرين7**

I- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

-1 بين أن : $f$ متصلة في $0$

-2 نعتبر الدالة $h_a$ $(a\neq 0\;;\;a\in I)$ المعرفة على $I$ بما يلي :

$$h_a(x)=\left(\ln(1+2a)-2a\right)x^2-\left(\ln(1+2x)-2x\right)a^2$$

أ- احسب : $h_a(0)$ و $h_a(a)$

بين أنه يوجد $b$ محصور بين $a$ و $0$ بحيث :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

ب- استنتج أن : $f$ قابلة للإشتقاق في $0$

و أن $f'(0)=-2$

3- أ- بين أن : $f$ قابلة للإشتقاق على $I-\{0\}$

و أن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

حيث أن : $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

ب- بين أن : $\forall x\in I-\{0\} : g(x)<0$

ج - استنتج تغيرات : $f$

4- أ- احسب : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أول النتيجتين هندسيا .

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[1;2]$

بحيث : $f(\alpha)=1$

ج- أنشئ $(C_f)$ التمثيل المبياني ل $f$ على معلم متعامد ممنظم ( نأخذ : $\alpha\simeq1.3$ )

II) 1- نضع : $J=[1;\alpha]$

و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $\quad(\forall x\in I)$

أ- بين أن : $\varphi$ قابلة للإشتقاق على $I$

و أن : $(\forall x\ge1)\ \ 0<\varphi'(x)\le\frac{2}{3}$

ب- تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن $\varphi(J)\subset J$

2- نعتبر المتتالية : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$u_0=1 \quad u_{n+1}=\ln(1+2u_n) \quad (\forall n\ge0)$

أ- بين أن : $u_n\in J \quad (\forall n\ge0)$

ب- بين أن : $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدد نهايتها

**الحل**

**I -1-**

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$=2\times1$$

$$\boxed{\lim_{x\to0} f(x)=2}$$

و لدينا : $f(0)=2$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)}$

و منه : $f$ متصلة في $0$

2- أ- $(a\neq0\ ;\ a\in I)$

$$h_a(x)=\left(\ln(1+2a)-2a\right)x^2-\left(\ln(1+2x)-2x\right)a^2$$

نجد : $h_a(0)=0$ و $h_a(a)=0$

إذن : $h_a(a)=h_a(0)$

و بما أن $h_a$ متصلة قابلة على المجال المحصور بين $a$ و $0$

فإنه حسب مبرهنة رول : يوجد $b$ محصور بين $a$ و $0$

بحيث : $h'_a(b)=0$

$$h'_a(b)=0\Leftrightarrow\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

ب- استنتاج أن : $f$ قابلة للإشتقاق في $0$

$$\lim_{a\to0}\frac{f(a)-f(0)}{a}=\lim_{a\to0}\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}$$
$$=\lim_{b\to0}\frac{-2}{1+2b}$$

$$\boxed{\lim_{a\to0}\frac{f(a)-f(0)}{a}=-2}$$

إذن : $f$ قابلة للإشتقاق في $0$

و $\boxed{f'(0)=-2}$

3- أ- لنبين أن : $f$ قابلة للإشتقاق على $I-\{0\}$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

حيث أن : $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

ب- لنبين أن : $\forall x\in I-\{0\} : g(x)<0$

$$g'(x)=-2\ln(1+2x)$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $-1/2$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ↗ | $0$ ‖ $0$ | ↘ |

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\boxed{\forall x \in I-\{0\} : g(x)<0}$$

ج - تغيرات $f$ :

$f$ تناقصية قطعا

4- أ-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{1+2x} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2x}{x}$$
$$= 0\times 2$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{\ln(1+2x)}{x}$$
$$= (-\infty)\times(-2)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty}$$

إذن : $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ مقارب ل $(C_f)$

ب- لنبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[1;2]$

بحيث : $f(\alpha)=1$

نعتبر الدالة : $k(x)=f(x)-1$ معرفة على $[1;2]$

لدينا : $f$ متصلة تناقصية قطعا على $I$ و $[1;2]\subset I$

إذن : $k$ متصلة تناقصية قطعا على $[1;2]$

$$k(1)=\ln(3)-1 \ ; \ k(2)=\frac{\ln(5)}{2}-1$$

$\ln(3)-1=\ln(3)-\ln(e)$ و $\ln(3)>\ln(e)$

إذن : $\ln(3)-1>0$ ومنه : $\boxed{k(1)>0}$

$$\frac{\ln(5)}{2}-1=\frac{\ln(5)-2\ln(e)}{2}$$
$$=\frac{\ln(5)-\ln(e^2)}{2}$$

و $5<e^2$ إذن : $\ln(5)<\ln(e^2)$

ومنه : $\boxed{k(2)<0}$

بما أن : $k$ متصلة تناقصية قطعا على $[1;2]$

و $k(1)k(2)<0$

فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[1;2]$

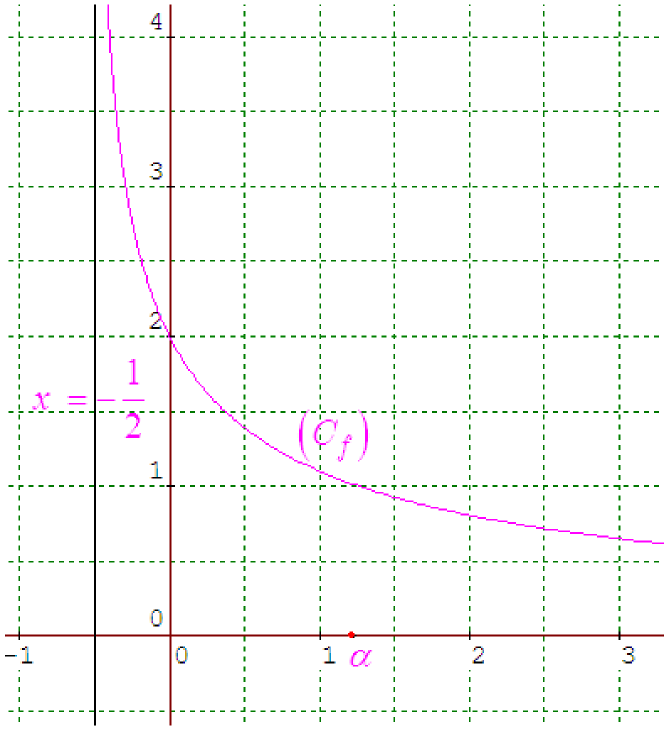
بحيث : $f(\alpha)=1$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[1;2]$

بحيث : $k(\alpha)=0$

ج- أنشئ $(C_f)$ التمثيل المبياني ل $f$ على معلم متعامد ممنظم ( نأخذ : $\alpha\simeq1.3$ )

| $x$ | $-1/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |




II) 1- نضع : $J=[1;\alpha]$

و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$

أ- $\varphi$ قابلة للإشتقاق على $I$

$$(\forall x\in I) \quad \varphi(x)=\frac{2}{1+2x}$$

لدينا : $\frac{2}{1+2x}>0$ $(\forall x\ge1)$

لدينا : $(\forall x\ge1)\ 1+2x\ge3 \Leftrightarrow (\forall x\ge1)\ \frac{2}{1+2x}\le\frac{2}{3}$

إذن : $(\forall x\ge1)\ 0<\varphi'(x)\le\frac{2}{3}$

ب- لدينا : $f(\alpha)=1$

إذن : $\frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha}=1 \Leftrightarrow \ln(1+2\alpha)=\alpha$

و منه : $\varphi(\alpha)=\alpha$

بما أن : $(\forall x\ge 1)\ 0<\varphi'(x)\le \frac{2}{3}$

فإن : $\varphi$ تزايدية على $[1;+\infty[$

و $J\subset[1;+\infty[$

إذن : $\varphi(J)=\left[\varphi(1);\varphi(\alpha)\right]=\left[\ln 3;\alpha\right]$

و لدينا : $\ln(3)>\ln(e)$ إذن : $\ln(3)>1$

إذن : $\left[\ln 3;\alpha\right]\subset\left[1;\alpha\right]$

و منه : $\varphi(J)\subset J$

-2 لدينا : $u_0=1$ $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$ $(\forall n\ge 0)$

إذن : $\varphi(u_n)=u_{n+1}$

أ- لنبين أن : $(\forall n\ge 0)\ u_n\in J$

بالترجع :

لدينا : $u_0=1$ و $1\in J$

إذن : $u_0\in J$

نفترض أن : $u_n\in J$

إذن : $\varphi(u_n)\in\varphi(J)$

بما أن : $\varphi(u_n)=u_{n+1}$ و $\varphi(J)\subset J$

فإن : $u_{n+1}\in J$

حسب برهان الترجع : $\boxed{(\forall n\ge 0)\ \ u_n\in J}$

ب- لنبين أن : $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

بالترجع :

لدينا : $u_0=1$ $\alpha\in[1;2]$

إذن : $0<\alpha-1\le 1$

و منه : $|u_0-\alpha|\le 1$

إذن : $|u_0-\alpha|\le\left(\frac{2}{3}\right)^0$

نفترض أن : $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا : $\varphi(u_n)=u_{n+1}$ و $\varphi(\alpha)=\alpha$

$|u_{n+1}-\alpha|=|\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)|$

إذن : $=|\ln(1+2u_n)-\ln(1+2\alpha)|$

$=\left|\ln\left(\frac{1+2u_n}{1+2\alpha}\right)\right|$

نعلم أن : $\forall x\in]0;+\infty[\ \ \ln x<x$

إذن : $|u_{n+1}-\alpha|\le\left|\frac{1+2u_n}{1+2\alpha}\right|$

لدينا : $\left|\frac{1+2u_n}{1+2\alpha}\right|=\left|\frac{2(u_n-\alpha)}{1+2\alpha}+\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right|$

و $\left|\frac{2(u_n-\alpha)}{1+2\alpha}+\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right|\le\frac{2}{1+2\alpha}|u_n-\alpha|+\left|\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right|$

و $\frac{2}{1+2\alpha}<\frac{2}{3}$ ( لأن $\alpha\in[1;2]$ )

و $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

إذن :

$$\frac{2}{1+2\alpha}|u_n-\alpha|+\left|\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right|\le\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left|\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right|\le\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

و منه : $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

حسب برهان الترجع : $\boxed{(\forall n\ge 0)\ |u_n-\alpha|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

ج- لنستنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم نحدد نهايتها

لدينا : $(\forall n\ge 0)\ |u_n-\alpha|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

إذن : $\lim|u_n-\alpha|\le\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

و منه : $\lim|u_n-\alpha|=0$

إذن : $\lim u_n=\alpha$

إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و $\lim u_n=\alpha$

-----------------

التما رين : 8 -9 -10 مثل التمرينين 1 - 2

مع الإنباه إلى :

إذاكان : $0<a<1$ فإن $\log_a$ تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$

إذاكان : $a>1$ فإن $\log_a$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

$\log=\log_{10}$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

**تمرين 8**

حل في $\mathbb{R}$ :

-1 $\log_4(x+2)+\log_4(x+3)=\log_4 6$

-2 $\log_{\frac{2}{3}}|x+2|+\log_{\frac{2}{3}}|x+5|=\log_{\frac{2}{3}} 6$

-3 $\log_3^2 x-7\log_3 x+6=0$

**تمرين 9**

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات :

-1 $\log_{\frac{2}{3}}(x-1)\le 0$

-2 $\log_{\frac{3}{5}}(x-1)-\log_{\frac{3}{5}}(2x-4)>0$

**تمرين 10**

حل في $\mathbb{R}$ :

1- $\log(x+2)+\log(x+3)=\log 6$

2- $\log|x+2|+\log\log_{\frac{2}{3}}|x+5|=\log 6$

3- $\log^2 x-7\log x+6=0$

**تمرين11**

**حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات :**

1- $\log(x-1)\leq 0$

2- $\log(x-1)-\log(2x-4)>0$