دالة لوغاريتم

التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $x \neq 0 \quad ; \quad f\left(x\right) = x\left(\ln x\right)^2 - \left(x-1\right)^2$ و $f\left(0\right) = -1$

1) أ) بين أن f متصلة على $\left[0,+\infty\right[$

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة 0

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين

3) أ) بين أن $\ln x \leq x-1 \quad \left(\forall x > 0\right)$

ب) أحسب $f'\left(x\right)$ و $f''\left(x\right)$ و تحقق أن $f'\left(1\right) = 0$

ج) استنتج إشارة $f'\left(x\right)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم منحنى الدالة f

التمرين الثاني

الجزء (1) لتكن g دالة بحيث $g\left(x\right) = x-(1+x)\ln(1+x)$

1) حدد مجموعة تعريف g و أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) \;;\; \lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)$

2) أحسب $g'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g

3) استنتج إشارة $g\left(x\right)$ (لاحظ أن $g(0)=0$)

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\left[-1,+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} & x\neq 0 \quad ; \quad x\neq -1 \\ f\left(0\right)=1 \quad ; & f\left(-1\right)=0 \end{cases}$$

1) أ- بين أن f متصلة في النقطة 0

ب- بين أن f متصلة على يمين النقطة -1

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة -1

3) أ) بين أن $x-\dfrac{x^2}{2} \leq \ln\left(1+x\right) \leq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3} \quad \left(\forall x \geq 0\right)$ و أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

ب) ليكن x من $\left]-1,0\right[$

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\left]-1,0\right[$ بما يلي : $\varphi\left(t\right) = t^2\left(x-\ln\left(1+x\right)\right) - x^2\left(t-\ln\left(1+t\right)\right)$

بين أن $\dfrac{x-\ln\left(1+x\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2\left(1+c\right)} \quad \left(\exists c \in \left]x,0\right[\right)$ و أدرس قابلية اشتقاق f على يسار 0

3) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = +\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$

4) أ- بين أن $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(1+x)\left(\ln(1+x)\right)^2} \quad ; \quad \left(\forall x \in \left]-1,+\infty\right[- \{0\}\right)$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم $y=x$ (Δ) ثم أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$

التمرين الثالث

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة بما يلي : $f_n\left(x\right) = nx + \ln x$

1) أ) احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n\left(x\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f_n\left(x\right)$

دالة لوغاريتم

ب) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f_n و ارسم المنحنى (C_1)

3) أ) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n و بين ان $u_n<1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب) بين أن $f_n(u_{n+1})=-u_{n+1}$ و استنتج رتابة المتتالية $(u_n)_n$

4) أ) بين أن $x>\ln x$ $(\forall x>0)$ و استنتج أن $u_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$ و بين ان $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nu_n}{\ln n}=1$

التمرين الرابع

الجزء (1)

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$

2) بين أن $g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ و ضع جدول تغيرات الدالة g

3) استنتج أن $g(x)>0$ $(\forall x>0)$

الجزء (2)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ و $f(0)=0$

1) أ- بين أن الدالة f متصلة على يمين 0

ب- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (3)

نعتبرالمتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ و نضع $V_n=\ln U_n$

1) أ- تحقق أن $V_n=f(n)$ و استنتج أن $(U_n)_n$ تزايدية

ب- بين أن $\ln(1+x)<x$ $(\forall x>0)$ و استنتج أن $U_n<e$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم احسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n>0}$

2) نضع $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{V_k}{k}$ أحسب S_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{\ln n}$

التمرين الخامس

لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[0,\dfrac{1}{e}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e},\infty\right[$ بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$ و $f(0)=0$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

دالة لوغاريتم

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ x<\frac{1}{e}}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ x>\frac{1}{e}}} f(x)$

3) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4) بين أن $f'(x)=\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أرسم المنحنى (C_f)

6) ليكن n عدد طبيعي بحيث $n\geq 2$

أ) بين أن المعادلة $f(x)=\sqrt{n}$ تقبل بالضبط حلين u_n و v_n بحيث $e^{-1}<u_n<1<v_n$

ب) (1) بين أن $v_n\geq\sqrt{n}$ $(\forall n\geq 2)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

(2) بين أن $\sqrt{x}>1+\ln x$ $(\forall x\geq 16)$ و استنتج أن $v_n\leq n$ $(\forall n\geq 16)$

(3) بين أن $\ln v_n=\dfrac{1}{2}\ln n+\ln\left(1+\ln v_n\right)$ $(\forall n\geq 2)$ و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln v_n}{\ln n}=\dfrac{1}{2}$

ج) (1) بين أن $(u_n)_n$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة

(2) بين أن $u_n=e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}}-1}$ $(\forall n\geq 2)$ و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e^{-1}$ ثم بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(u_n-e^{-1}\right)=e^{-2}$

التمرين السادس

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x)=x-n+\dfrac{n}{2}\ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$

2) أحسب المشتقة $f_n'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f_n

3) أ) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n ثم بين أن $1\leq u_n<e^2$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب) بين أن $f_n(u_{n+1})=1-\dfrac{1}{2}\ln u_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$

ج) بين أن $\ln u_n=2-\dfrac{2}{n}u_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

د) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}u_n$ و استنتج ان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e^2$

4) أ) بين أن $e^{\frac{2}{n}u_n}-1=\dfrac{2e^d}{n}u_n$ $(\exists d>0)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب) استنتج أن $1\leq\dfrac{e^{\frac{2}{n}u_n}-1}{\frac{2}{n}u_n}\leq e^{\frac{2e^2}{n}}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(e^2-u_n\right)$