الحساب التكاملي

I. تكامل دالة متصلة على مجال:

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية لها على $[a,b]$.

تكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. ملاحظات :

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$
- الدالة $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a
- v قابلة للاشتقاق على E بحيث $v(E) \subset I$ و f متصلة على I فإن الدالة $\psi : x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t)dt$ قابلة للاشتقاق على E و لدينا : $\psi'(x) = v'(x).f(v(x))$

3. خاصيات :

- ❖ $\int_a^a f(x)dx = 0$
- ❖ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- ❖ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. خطانية التكامل :

خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$. لدينا :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

II. التكامل و الترتيب :

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$. لدينا :

- إذا كانت $f \geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f \leq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f \leq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $[a,b]$
- يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

III. تقنيات حساب التكامل :

أ. باستعمال دالة أصلية : سبق الحديث عنها في بداية الدرس

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

ج. باستعمال المكاملة بتغيير المتغير

خاصية و تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و u دالة قابلة للاشتقاق على مجال $[\alpha,\beta]$ (بحيث $u([\alpha,\beta])=I$)

لدينا : $\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)dt$ (و ذلك بوضع $t=u(x)$)

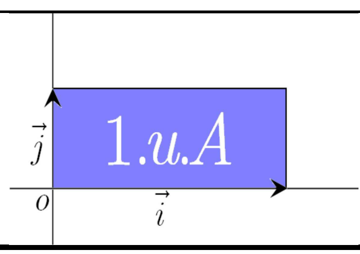
IV. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O

و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



خاصية 1:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

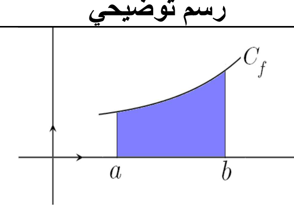
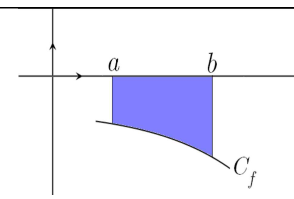
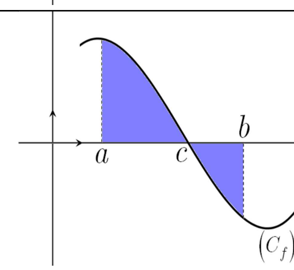
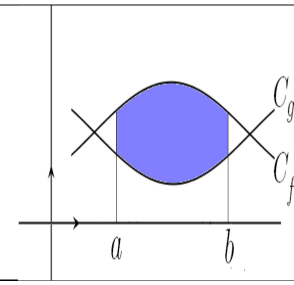
خاصية 2:

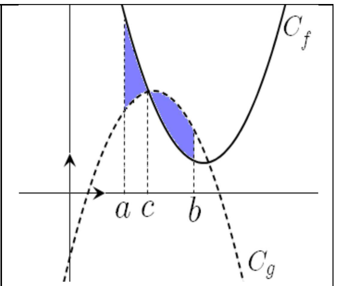
لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

حالات خاصة :

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز الملون في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ و • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$
	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$

	• (C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ و • (C_f) يوجد تحت (C_g) على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\right)u.A$

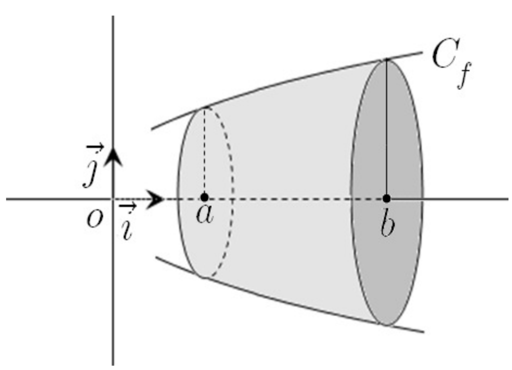
.V حساب الحجوم :

خاصية 1:

ليكن $(\sum)$ مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم $(\sum)$ مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\le t\le b$
إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن V حجم المجسم $(\sum)$ هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم.

خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :
$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2dx\right]u.v$ حيث : $u.v$: وحدة الحجوم



VI. حساب بعض النهايات باستعمال التكامل :

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال $\left[a,b\right]$

نضع $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$ و $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right) \quad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

لدينا المتتاليتان $\left(s_n\right)$ و $\left(S_n\right)$ متقاربتان و $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f\left(t\right)dt$