I. تكامل دالة f متصلة على قطعة $[a,b]$:

01. تعريف:

f دالة متصلة على قطعة $[a,b]$ حيث F دالة أصلية ل f.

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل f من a إلى b. و نرمز له ب: $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$

ويقرأ : التكامل من a إلى b ل $f(x)dx$ أو أيضا مجموع $f(x)dx$ من a إلى b .

02. ملحوظة :

- $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ (أي غير مرتبط باختيار أي دالة أصلية سواءا كانت F أو G للدالة f).
- في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير و منه : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt=\cdots$
- $\int_a^a f(t)dt=[F(t)]_a^a=F(a)-F(a)=0$

03. تمرين : أحسب: $\int_0^1 \cos x dx$ و $\int_0^1(x^2-2x)dx$ و $\int_2^{1+e}\frac{4}{x-1}dx$ و $\int_0^1 x^2e^{x^3+4}dx$ و $4\times\int_1^2\sqrt[3]{x^2}dx$ و $\int_{-\sqrt{3}}^0\frac{5}{1+x^2}dx$.

أجوبة :

- نحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$
- نحسب : $\int_0^1(x^2-2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}1^3-1^2\right)-\left(\frac{1}{3}0^3-0^2\right)=-\frac{2}{3}$.
- نحسب : $\int_2^{1+e}\frac{4}{x-1}dx=[4\ln|x-1|]_2^{1+e}=4(\ln e-\ln 1)=4$.
- نحسب : $\int_0^1 x^2e^{x^3+4}dx=\int_0^1(x^3+4)'e^{x^3+4}dx=\left[e^{x^3+4}\right]_0^1=e^5-e^4$.
- نحسب : $4\times\int_1^2\sqrt[3]{x^2}dx=4\times\int_1^2 x^{\frac{2}{3}}dx=4\times\left[\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}\right]_1^2=4\times\frac{3}{5}\left(2^{\frac{5}{3}}-1^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{12}{5}\left(\sqrt[3]{2^5}-1\right)$.
- نحسب : $\int_{-\sqrt{3}}^0\frac{5}{1+x^2}dx=[5\times\arctan x]_{-\sqrt{3}}^0=5\times\left(\arctan 0-\arctan\left(-\sqrt{3}\right)\right)=5\times\left(0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{3}$.

II. خاصيات التكامل : علاقة شال – خطانية التكامل – التكامل و الترتيب:

01. خاصيات :

1. خاصية :

- f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ و f' متصلة على $[a,b]$ لدينا : $\int_a^b f'(x)dx=[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$.
- $c\in\mathbb{R}$ لدينا : $\int_a^b cdx=[cx]_a^b=c(b-a)$.

2. خاصيات :

f دالة متصلة على $[a,b]$. لدينا :

- $\int_a^a f(x)dx=0$ و $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ (مع c من I)

3. خاصيات : (خطانية التكامل و التكامل و الترتيب)

f و g متصلتين على مجال I مع a و b من I ؛ α و β من $\mathbb{R}$. لدينا :

- خطانية التكامل : $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$ نلخصهما ب:
$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$
- التكامل و الترتيب: f موجب على $[a,b]$ ؛ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ (منحنى f فوق محور الأفاصيل و $a\leq b$ فإن تكاملها موجب)
- $\forall x\in[a,b];f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$ و $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$
- $\forall x\in[a,b]:m\leq f(x)\leq M$ فإن : $(b-a)m\leq\int_a^b f(x)dx\leq(b-a)M$ أو $m\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\leq M$.

4. برهان :

❖ نبرهن على : $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

- لتكن F و G دالتين أصليتين ل f و g على $[a,b]$ (لأن f و g متصلتين على $[a,b]$) .
- $F+G$ دالة أصلية ل $f+g$.

من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx&=[F(x)]_a^b-[G(x)]_a^b\\&=(F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))\\&=(F(b)+G(b))-(F(a)-G(a))\\&=((F+G)(b))-((F+G)(a))\\&=\int_a^b (f+g)(x)dx\end{aligned}$$

خلاصة : $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

❖ نبرهن على : $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

- لتكن F دالة أصلية ل f على $[a,b]$ مع $a\leq b$ ومنه $F'=f\geq 0$ (لأن f موجبة على $[a,b]$) و بالتالي F تزايدية على $[a,b]$
- لدينا :

$$\begin{aligned}a\leq b&\Rightarrow F(a)\leq F(b)\ ;\ (f\nearrow)\\&\Rightarrow F(b)-F(a)\geq 0\\&\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geq 0\end{aligned}$$

خلاصة : $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

❖ نبرهن على : $\forall x\in[a,b];f(x)\le g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$.

❖ نبرهن على : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx$.

- لدينا : $(1):\ \forall x\in[a,b]\ ;\ -|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$
- لدينا :

$$(1)\Rightarrow -\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx$$
$$\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$$

خلاصة : $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

5. تمرين تطبيقي :

1) أحسب: $\int_{-3}^{2}|2x-4|\,dx$.

2) نضع: $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx$

3) أ - أحسب: $A+B$ و $A-B$. ب – استنتج قيمة كل من A و B .

4) بين أن : $\int_2^5 \ln(x+1)\,dx\le\int_2^5 \ln(x+3)\,dx$.

III. دالة معرفة بتكامل :

01. خاصية :

> f دالة متصلة على مجال I و $a\in I$.
> الدالة العددية F المعرفة بما يلي :
> $$F:I\to\mathbb{R}$$
> $$x\mapsto F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$
> هي الدالة الأصلية ل f على I و التي تنعدم في a .

02. مثال :

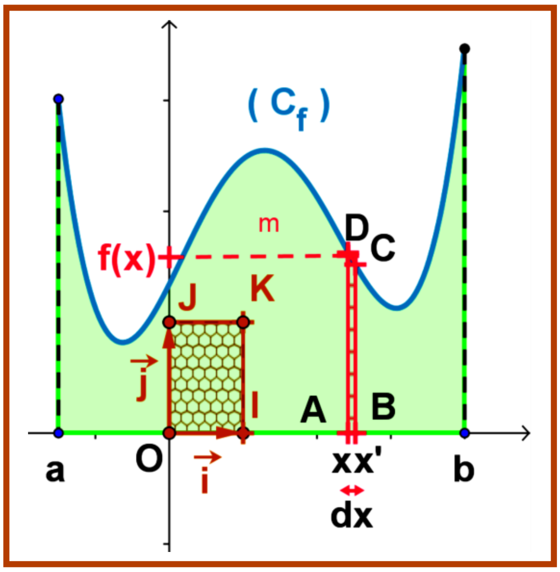
نعتبر الدالة العددية : $F(x)=\int_1^x\frac{1}{t}dt$: $\forall x\in]0,+\infty[$.لدينا : $F(x)=\int_1^x\frac{1}{t}dt=[\ln|t|]_1^x=\ln|x|-\ln|1|=\ln x$

خلاصة : الدالة F هي الدالة الأصلية ل $f(x)=\frac{1}{x}$ التي تنعدم في 1 .

IV. التأويل الهندسي ل $\int_a^b f(x)dx$:

01. تقديم :

- في هذه الفقرة نأخذ المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$
- f دالة متصلة و موجبة على القطعة $[a,b]$ (أي $f(x)\ge0$, $\forall x\in[a,b]$) .
- نضع : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و نعتبر النقطة K حيث $OIKJ$ مستطيل .



- وحدة قياس المساحات هي مساحة المستطيل OIKJ ونرمز لها بالرمز ب : $u.a$ $(u.a = \text{unité aire})$
- (C_f) منحنى الدالة f على $[a,b]$. (مع العلم أن (C_f) يوجد فوق محور الأفاصيل لأن $f(x) \geq 0$)
- لنعتبر Δ_f الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = a$ و $x = b$.
- لدينا : $\Delta_f = \{M(x,y) / a \leq x \leq b \text{ و } 0 \leq y \leq f(x)\}$
- لنعتبر $\mathcal{A}$ مساحة الحيز Δ_f من المستوى (P) معبر عنها ب $u.a$.

نأخذ : $x \in [a,b]$.

- على محور الأفاصيل نعتبر العدد x' حيث $x < x'$ و طول القطعة $[x,x']$ هو : dx يقارب من 0 (أي $dx \sim 0$) .

ملحوظة: المساحة تحسب بالتكامل ومرتبطة بإشارة الدالة f على $[a,b]$

- $x + dx \sim x$ و بمأن f متصلة $f(x+dx) \sim f(x)$.
- نعتبر المستطيل $\Delta_x = ABCD$ حيث $D\begin{pmatrix} x' \\ f(x) \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.
- S_x مساحة المستطيل Δ_x هي : $S_x = f(x) \times dx$.
- لدينا :مجموع مساحات المستطيلات S_x عندما يتغير x من a إلى b أي $\sum_{x=a}^{x=b} S_x = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx$ وهو يساوي مساحة الحيز Δ_f

ومنه نكتب : $\sum_{x=a}^{x=b} S_x = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx = \int_a^b f(x) \times dx \ (\times u.a)$.

و منه : $\sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx = \int_a^b f(x) dx \ (\times u.a)$.

خلاصة :

- مجموع مساحات المستطيلات S_x عندما يتغير x من a إلى b أي $\sum_{x=a}^{x=b} S_x = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx$ هو التكامل $\int_a^b f(x) dx$ مضروب في وحدة المساحة $u.a$.
- $\int_a^b f(x) dx \ (\times u.a)$ هو : مساحة الحيز من المستوى Δ_f (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = a$ و $x = b$.
- مساحة $\Delta_f = \{M(x,y) / a \leq x \leq b \text{ و } 0 \leq y \leq f(x)\}$ هو $\int_a^b f(x) dx \ (\times u.a)$

02. خاصية :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$. f دالة متصلة و موجبة على القطعة $[a,b]$ و (C_f) منحناها .
$\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى Δ_f (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = a$ و $x = b$ هو $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \ (\times u.a)$.

V. القيمة المتوسطة La valeur moyenne

01. خاصية و تعريف:

- f متصلة على مجال I مع a و b من I حيث $a<b$.
 يوجد على الأقل عنصر c من المجال $[a,b]$ حيث: $(b-a)\times f(c)=\int_a^b f(x)dx$
- العدد الحقيقي: $f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a,b]$.

02. برهان :

✓ طريق 1 :

لدينا :

- $f([a,b])=[m,M]$ (لأن f متصلة على $[a,b]$)
- $\forall x\in[a,b]:m\leq f(x)\leq M$ فإن : $(b-a)m\leq\int_a^b f(x)dx\leq(b-a)M$ أو $m\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\leq M$.
- نحصل على $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\in[m,M]=f([a,b])$.
- بمأن f متصلة على $[a,b]$ و حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $\exists c\in[a,b]\ :f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

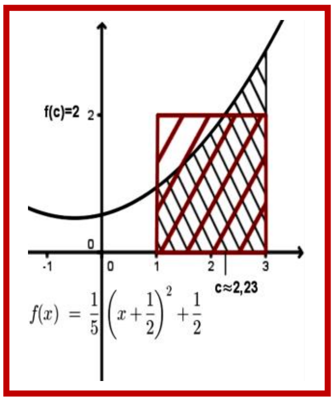
✓ طريق2 :

- F دالة اصلية ل f على $[a,b]$. (لأن f متصلة على $[a,b]$)
- حسب مبرهن تزايدات المنتهية T.A.F : $\exists c\in]a,b[\ /F'(c)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ ومنه :

$$\exists c\in]a,b[\ /f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\ ;\left(\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\right).$$

خلاصة : $\exists c\in]a,b[\ /f(c)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$

03. مثال:



f متصلة على مجال $[0,2]$ حيث: حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x$.

لدينا :

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2-0}\times\int_0^2 3xdx=\frac{1}{2}\times\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\left[x^2\right]_0^2=3$$

خلاصة : القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[0,2]$ هي $f(c)=3$

$f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx$ أي $(b-a)\times f(c)=\int_a^b f(x)dx$

04. تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها :

يوجد مستطيل بُعْدَيْه (أي الطول والعرض) $(b-a)$ و $f(c)$ مساحته هي المساحة $A=\int_a^b f(x)dx$

VI. تقنيات حساب التكامل :

A. المكاملة بالأجزاء :L' integration par parties

01. خاصية:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a,b]$ حيث u' و v' متصلتين على $[a,b]$ لدينا:

$$\underbrace{\int_a^b u(x)\times v'(x)dx}_{(1)}=\underbrace{\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b}_{(2)}-\underbrace{\int_a^b u'(x)\times v(x)dx}_{(3)}$$

02. برهان :

- بمأن : u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a,b]$ إذن الدالة $u\times v$ قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ مع $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
- ومنه : $u\times v'=(u\times v)'-u'\times v$
- الدوال : $u'\times v$ و $(u\times v)'$ و $u\times v'$ متصلة على $[a,b]$ لأن u' و v' متصلتين على $[a,b]$ و u و v متصلتين على $[a,b]$ (u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a,b]$)
- يمكن إجراء التكامل على $[a,b]$ ل : $u\times v'=(u\times v)'-u'\times v$

$$\int_a^b u(x)\times v'(x)dx=\int_a^b\left((u\times v)'(x)-u'(x)\times v(x)\right)dx$$

$$=\int_a^b (u\times v)'(x)dx-\int_a^b u'(x)\times v(x)dx \quad : \text{ومنه } u\times v'=(u\times v)'-u'\times v$$

$$=\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)\times v(x)dx$$

خلاصة : $\int_a^b u(x)\times v'(x)dx=\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)\times v(x)dx$

03. طريقة وضع المكاملة بالأجزاء:

$$\begin{array}{ccc} u(x)=\cdots & & u'(x)=\cdots \\ (1)\downarrow & (2)\searrow \quad - & \downarrow(3) \\ v'(x)=\cdots & & v(x)=\cdots \end{array}$$

04. أمثلة:

1) نحسب: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

جواب:

لنحسب I باستعمال المكاملة بالأجزاء: نضع:

$$\begin{array}{ccc} u(x)=x & & u'(x)=1 \\ (1)\downarrow & (2)\searrow \quad - & \downarrow(3) \\ v'(x)=\cos x & & v(x)=\sin x \end{array}$$

ومنه: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\times\sin x dx$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\sin 0\right) - \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

خلاصة: $I = \frac{\pi}{2} - 1$

2) نحسب: $J = \int_1^e \ln(x)\,dx$

لنحسب I باستعمال المكاملة بالأجزاء: نضع:

$$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1)\downarrow \qquad (2)\searrow \qquad - \qquad \downarrow(3)$$

$$v'(x) = x \qquad v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

ومنه: $\int_1^e \ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2\ln(e) - 1^2\ln(1)\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1^2\right) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

خلاصة: $J = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$

B. المكاملة بتغير المتغير : L' integration par changement de variable:

01. خاصية:

لتكن f و g دالتين حيث f متصلة على خلى مجال J و g قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة g' متصلة على I مع $g(I) \subset J$. لدينا لكل a و b من I :

$$\int_a^b f(g(x))\times g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

02. برهان :

نعتبر F دالة أصلية ل f على J إذن : $F' = f$.

لدينا :

$$\int_a^b f(g(x))\times g'(x)\,dx = \int_a^b F'(g(x))\times g'(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (F\circ g)'(x)\times g'(x)\,dx$$

$$= \left[F\circ g(x)\right]_a^b$$

$$= F\circ g(b) - F\circ g(a)$$

$$= F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

خلاصة : $\int_a^b f(g(x))\times g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$.

03. طريقة وضع المكاملة بتغير المتغير :

نضع :

- $t = g(x)$ ومنه : $dt = g'(x)dx$.
- $x = a$ فإن $t = g(a)$. ثم ل : $x = b$ فإن $t = g(b)$

ومنه نحصل على : $\int_a^b f(g(x)) \times g'(x)dx = \int_a^b \underbrace{f(g(x))}_{f(t)} \times \underbrace{g'(x)dx}_{dt} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$.

04. أمثلة :

❖ مثال 1 :

نحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

نضع : $t = g(x) = \sin x$ و منه : $dt = \cos x dx$.

- من أجل : $x = 0$ فإن $t = g(0) = \sin 0 = 0$. ثم ل : $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $t = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^3 x}_{t^3} \underbrace{\cos x dx}_{dt} = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}\left[t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

❖ مثال 2 :

نحسب : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

نضع : $\sin t = x$ و منه : $\cos t dt = dx$. و كذلك : $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t}$

- من أجل : $x = 0$ فإن $\sin t = 0$ أي $t = 0$. ثم ل : $x = 1$ فإن $\sin t = 1$ أي $t = \frac{\pi}{2}$

ومنه :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{1-\sin^2 t}} \underbrace{dx}_{\cos t dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \quad ; \left(|\cos t| = \cos t \, , t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t + \sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

خلاصة : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

❖ مثال 3 :

نحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+1} \sin x dx$

نضع : $t = g(x) = e^{\cos x}$ و منه : $dt = -\sin x e^{\cos x}dx$.

- من أجل : $x = 0$ فإن $t = g(0) = e^{\cos 0} = e$. ثم ل : $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $t = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\cos\frac{\pi}{2}} = 1$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+1}\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{e^{\cos x}+1}}_{\frac{1}{t+1}} \underbrace{\sin x e^{\cos x} dx}_{-dt} = -\int_e^1 \frac{1}{t+1}dt = -\left[\ln|t+1|\right]_e^1 = \ln\frac{2}{1+e}$

VII تطبيقات حساب التكامل:

01. حساب نهايات بعض المتتاليات:

❖ مبرهنة 1 :

f دالة متصلة و موجبة و رتيبة على $[a,b]$. حيث :

$\mathscr{A}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right)$ و $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right)$.

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = \int_a^b f(x)dx$

- f دالة متصلة و موجبة و رتيبة على $[a,b]$.
- القطعة $[a,b]$ يتم تقسمها إلى n قطعة متساوية الطول على الشكل $[x_k,x_{k+1}]$ مع $k\in 0,n$ و $x_0=a$ و $x_n=b$ (القطع هي $[x_0,x_1]$ و $[x_1,x_2]$ و $[x_2,x_3]$ و....... و $[x_{n-1},x_n]$ و ذلك بوضع $x_k=a+k\times\frac{b-a}{n}$.
- لدينا : $x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}$.
- لنعتبر Δ_k الحيز المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ للدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذي المعادلتين $x=x_k$ و $x=x_{k+1}$.
- نضع : $\mathscr{A}_k$ مساحة الحيز Δ_k. لدينا : $\mathscr{A}_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$.
- بمأن : f رتيبة على $[a,b]$ إذن f رتيبة على $[x_k,x_{k+1}]$ لدينا :

$x_k\le x\le x_{k+1} \Rightarrow f(x_k)\le f(x)\le f(x_{k+1})\ ;(1)$ (حالة f تزايدية)

$x_k\le x\le x_{k+1} \Rightarrow f(x_{k+1})\le f(x)\le f(x_k)\ ;(2)$ (حالة f تناقصية) .

✓ ندرس حالة f تزايدية :

$$(1)\Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dx \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \mathscr{A}_k \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1})dx$$

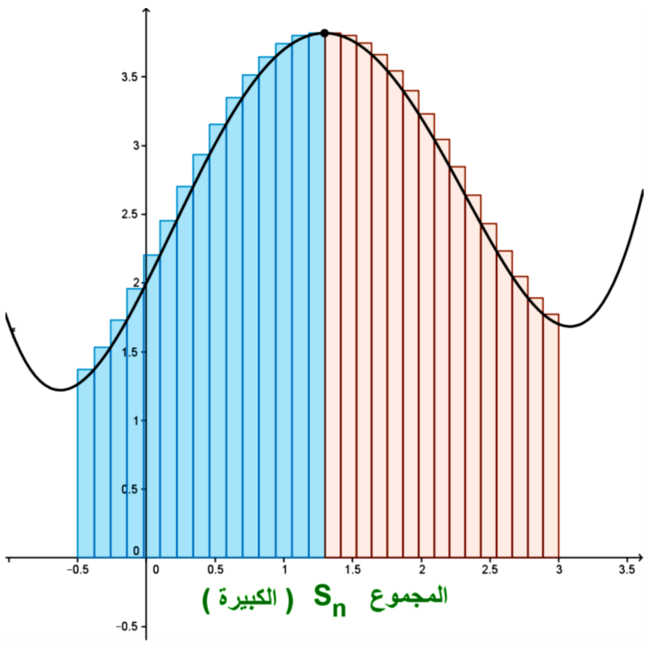
$$\Rightarrow (x_{k+1}-x_k)f(x_k)\le \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \le (x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1})\ ;f(x_k)=C^t\ ,f(x_{k+1})=C^t$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{n}f(x_k)\le \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \le \frac{b-a}{n}f(x_{k+1})$$

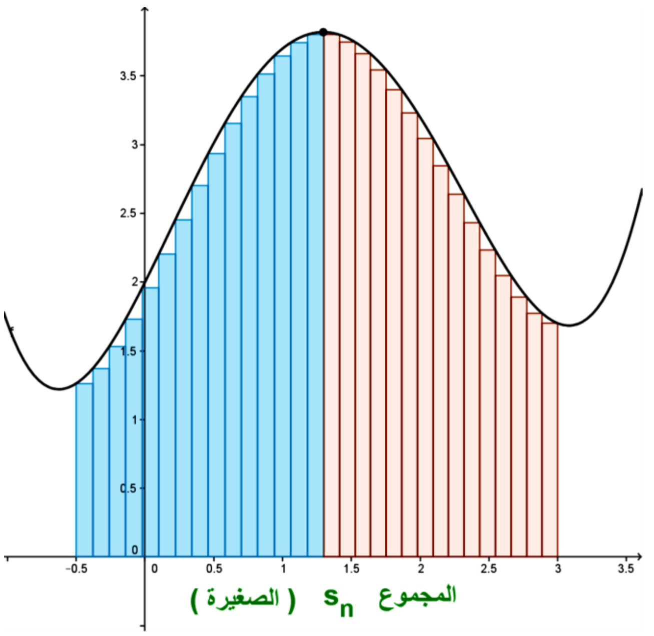
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{b-a}{n}f(x_k)\le \sum_{k=0}^{k=n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{k=n-1}\mathscr{A}_k = \int_a^b f(x)dx \le \sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{b-a}{n}f(x_{k+1})$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k)\le \int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_{k+1})$$

$$\Rightarrow \mathscr{A}_n \le \int_a^b f(x)dx \le S_n \quad \left(\mathscr{A}_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k)\ ;\ S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_{k+1})\right)$$



المجموع S_n (الكبيرة)



المجموع s_n (الصغيرة)

- لدينا : $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dx$ مساحة المستطيل الصغير و $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1})\,dx$ مساحة المستطيل الكبير .
- لدينا : s_n مجموع مساحات المستطيلات الصغرى و S_n مجموع مساحات المستطيلات الكبرى .
- لدينا : $S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)$
- نتيجة التي حصلنا عليها هي : $s_n \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_n$ ومنه : $0 \le \int_a^b f(x)\,dx - s_n \le S_n - s_n$ (3) .
- عندما : يكون n عدد القطع التي قسمت بها القطعة $[a,b]$ يؤول إلى $+\infty$ نحصل على $S_n = s_n$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - s_n = 0$ (4)
- حسب (3) و (4) نحصل على $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$.
- لدينا : $S_n = (S_n - s_n) + s_n$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - s_n) + s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

✓ ندرس حالة f تناقصية : بنفس الطريقة نبين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

❖ مبرهنة 2 :

f دالة متصلة و موجبة و رتيبة على $[a,b]$. حيث :

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right) \text{ و } S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right) .$$

وإذا كانت : f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و دالتها المشتقة f' محدودة على $]a,b[$ (أي $\exists A\ge 0 ,\ \forall x\in]a,b[\ ,\ |f'(x)|\le A$.

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$

❖ مثال :

- n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر المتتالية : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{i}{n^2}$.
- نحسب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

جواب :

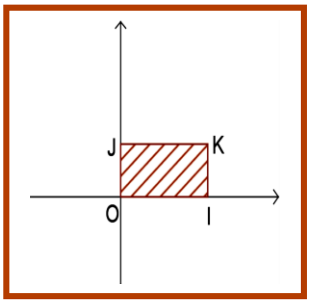
لدينا : $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(0+k\times\frac{1-0}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{i}{n} = u_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^2} = u_n$. يتبين أن

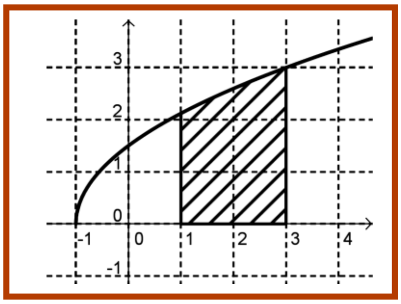
: $a=0$ و $b=1$ و $x_k = a+k\times\frac{b-a}{n}$ ومنه $f(x_k)=x_k$ أي $f(x)=x$.

الدالة f متصلة و موجبة و تزايدية على $[0,1]$. ومنه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

خلاصة : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

02. حساب المساحات:



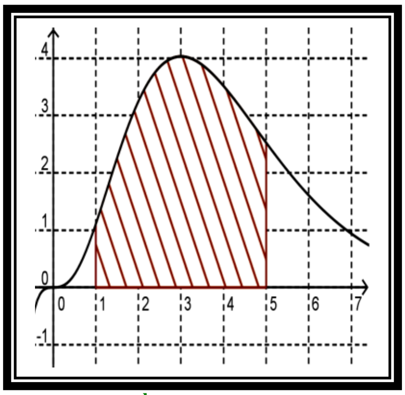


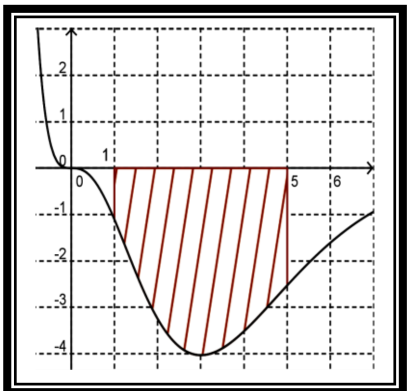
- في هذه الفقرة نأخذ المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد $(0,\vec{i},\vec{j})$
- fالدالة متصلة على قطعة $[a,b]$

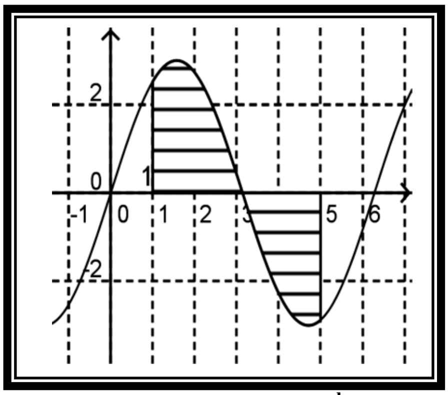
ملحوظة: وحدة قياس المساحات هي مساحة المستطيل OIKJ

ونرمز لها بالرمز $u.a$ $(u.a = \text{unité aire})$

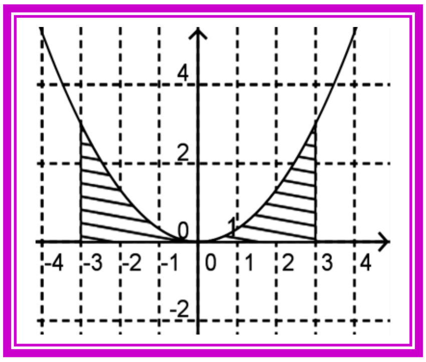
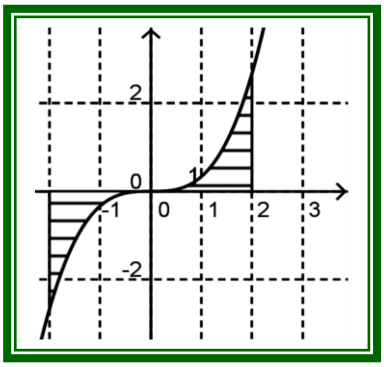
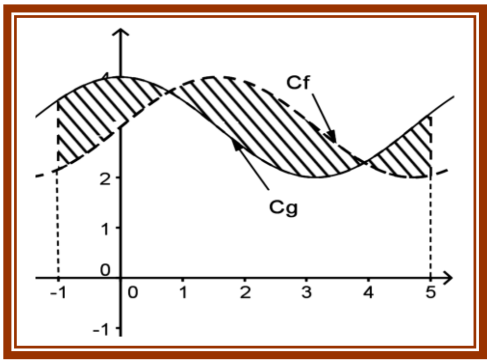
- لنعتبر (F) الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$.
- لنعتبر A مساحة الحيز (F) من المستوى (P)
- ملحوظة: المساحة تحسب بالتكامل ومرتبطة بإشارة الدالة f على $[a,b]$

<table>
<tr><td colspan="3">المساحة بوحدة المساحة ونرمز لها ب u.a) ملحوظة إذا كان $1u.a = 2,5cm^2$ يجب ضرب التكامل A في 2,5 ومنه المساحة هي : $S = 2,5\times A\ cm^2$</td></tr>
<tr><td>f موجبة على $[a,b]$</td><td>f سالبة على $[a,b]$</td><td>f إشارتها تتغير على $[a,b]$</td></tr>
<tr><td>

المساحة هي : $A = \int_a^b f(x)dx$
مثال: $\int_1^5 f(x)dx$</td><td>

المساحة هي : $A = -\int_a^b f(x)dx$
مثال:
$A = -\int_1^5 f(x)dx = \int_5^1 f(x)dx$</td><td>

$A = \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
مثال:
$A = \int_1^5 \lvert f(x)\rvert dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$</td></tr>
</table>

دالة f زوجية و متصلة على قطعة $[-a,a]$ و f موجبة على $[0,a]$	دالة f فردية و متصلة على قطعة $[-a,a]$	لنعتبر Δ مساحة الحيز المحصور (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما هما $x=a$ و $x=b$
		
$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$	$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$	المساحة هي : $A=\int_{a}^{b} \lvert f(x)-g(x) \rvert dx$ $A=\int_{-1}^{5} \lvert f(x)-g(x) \rvert dx = -\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx + \int_{1}^{4}(f(x)-g(x))dx - \int_{4}^{5}(f(x)-g(x))dx$

ملحوظة:

إذا كان $1u.a = 2,5cm^2$ يجب ضرب التكامل A في $2,5$ ومنه المساحة هي : $S = 2,5\times A\ cm^2$

03. حساب الحجوم:

A. حجم لجزء مجسم المحصور بين مستويين $(P_1): z=a$ و $(P_2): z=a$

- في هذه الفقرة نعتبر: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- لنعتبر في الفضاء مجسم (S) $(solide)$ محصور بين مستويين (P_1) و (P_2) محددين بالمعادلتين $(P_1): z=a$ و $(P_2): z=a$ حيث $a<b$.
- لنعتبر المستوى (S_t) الذي معادلته الديكارتية هي $(S_1): z=t$ حيث $t\in[a,b]$.
- ليكن $F_t+(S_t)\cap(S)$ (F_t الشكل المحصل عليه لتقاطع المجسم (S) و المستوى (S_t) .
- نعتبر $s(t)$ مساحة الشكل F_t .

1. خاصية :

> الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
>
> $s:[a,b]\to\mathbb{R}^+$
>
> $t\mapsto s(t)$
>
> إذا كانت الدالة s متصلة على $[a,b]$ فإن حجم المجسم (S) هو : $V = A = \int_{a}^{b} s(t)dt\ \times(u.v\ volume)$
>
> مع العلم أن وحدة قياس الحجم هي $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$

B. حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل :

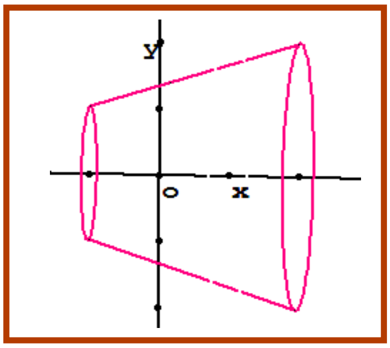
- f دالة متصلة على القطعة $[a,b]$ مع $(a<b)$.
- ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$.
- نفترض أن المنحنى (C_f) قام بدورة كاملة حول محور الأفاصيل فإنه يواد مجسم الدوران للدالة f على $[a,b]$.

1. خاصية:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. f دالة متصلة على القطعة $[a,b]$ مع $(a<b)$.

حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل هو: $V=\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$ بوحدة قياس الحجوم u.v

2. أمثلة :



الفضاء منسوب إلى م.م.م $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1cm$

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1,2]$ ب: $f(x)=x+5$

ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1) أنشئ المجسم على الرسم

2) نحسب V حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل على المجال $[-1,2]$

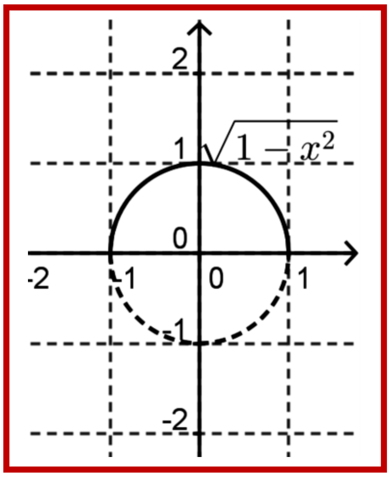
جواب:

1) أنظر الرسم الأخير.

2) حجم مجسم الدوران:

لدينا: $V=\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx=\int_{-1}^2 \pi(f(x))^2\,dx=\int_{-1}^2 \pi(x-5)^2\,dx=\int_{-1}^2 \pi(x-5)^2\,dx=\frac{\pi}{3}\left[(x-5)^3\right]_{-1}^2=\frac{189\pi}{3}$

مثال 2 :



- الفضاء منسوب إلى م.م.م $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1cm$
- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1,1]$ ب: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$.

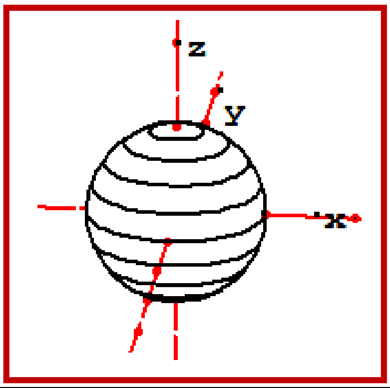
3) أنشئ المجسم على الرسم

4) نحسب V حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل على المجال $[-1,1]$

جواب:

1) أنظر الرسم الأخير.

2) حجم مجسم الدوران:



لدينا: $V=\int_{-1}^2 \pi(f(x))^2\,dx=\int_{-1}^2 \pi(x-5)^2\,dx=\int_{-1}^2 \pi(x-5)^2\,dx=\frac{\pi}{3}\left[(x-5)^3\right]_{-1}^2=\frac{189\pi}{3}$

$$\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx=\int_{-1}^1 \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int_{-1}^1 \pi(1-x^2)\,dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1=\frac{4\pi}{3}cm^3$$

طريقة 2: (حجم كرة شعاعها هو $R=1$).