التمرين الأول

أحسب التكاملات التالية : $\int_1^2 \frac{2x-1}{(3x^2-3x+1)^2}dx$ ، $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ ، $\int_{\pi^2}^1 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^3 x\ dx$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(tx)\ dt$ حيث $x\in\mathbb{R}^*$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\ dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos 3x\ dx$ ، $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx$ ، $\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}dx$ ، $\int_0^1 \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}dt$

التمرين الثاني

نعتبر التكامل التاليين : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\sin 2x\ dx$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos^2 x\ dx$

1) أحسب كل من التكاملين $I-J$ و $I+J$

2) استنتج قيمة كل من I , J

التمرين الثالث

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب ما يلي : $\int_1^{\sqrt{3}} x\arctan x\ dx$ ، $\int_0^{\pi} x\sin x\ dx$ ، $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^3}dx$

$\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ (أحسب مشتقة الدالة $x\to\frac{1}{1+x^2}$)

التمرين الرابع

باستعمال مكاملة بتغيير المتغير حدد التكاملات التالية : $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}dt$ ضع $x=\sqrt{t^2+1}$

$\int_0^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx$ ضع $t=\sqrt{x}$ ، $\int_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}dx$ ضع $t=\sqrt{x}+1$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ ضع $t=\tan\frac{x}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin 2x}$ ضع $t=\tan x$ ، $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx$ ضع $x=2\sin t$

التمرين الخامس

نعتبرالتكامل $W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$ لكل عدد طبيعي n

1) أحسب W_0 ; W_1

2) أ- بين أن $W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ ثم استنتج $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\ dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\ dx$

ب- أحسب W_{2n} بدلالة n

3) بين أن المتتالية $(W_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

4) بين أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}=1$

5) أ- بين أن $(n+1)W_{n+1}W_n=\frac{\pi}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n}\,W_n=\sqrt{\pi}$