حســـــاب التكــــامل

1 أحسب التكاملات التالية :

$I_3 = \int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$	$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x\left(2+\ln x\right)^3}\,dx$	$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\,dx$
$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$	$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$	$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2}\,dx$

2 باستعمال مكاملة بالأجزاء حدد التكاملات التالية

$J_3 = \int_0^2 \left(x-1\right)e^{2x}\,dx$	$J_2 = \int_0^1 x\ln\left(2x+1\right)dx$	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x-3\right)\cos x\,dx$
$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$	$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$	$J_4 = \int_0^1 x^3 \arctan x\,dx$

3 باستعمال مكاملة بتغيير المتغير أحسب ما يلي :

$K_3 = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+e^t\right)}{1+e^{-t}}\,dt$ ضع $x = 1+e^t$	$K_2 = \int_1^2 \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\,dx$ ضع $t = \sqrt{x-1}$	$K_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}\,dx$. ضع $t = \sqrt{x^2+1}$
$K_6 = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ضع $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$	$K_5 = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ ضع $t = \sqrt{x^2-1}$	$K_4 = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ ضع $t = \sqrt{e^x-1}$

4 لتكن f دالة متصلة على المجال $\left[a,b\right]$ و بحيث $f\left(a+b-x\right) = f\left(x\right)$ $\left(\forall x \in \left[a,b\right]\right)$

1) بين أن $\int_a^b xf\left(x\right)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f\left(x\right)dx$

2) استنتج قيمة $I = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

5

⇦ بين ما يلي : $\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx \le 1$ ، $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,dt \le \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

⇦ بين أن $\frac{1}{1+\pi^2} \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx \le \frac{4}{4+\pi^2}$

6

نضع $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$ و $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx$ لكل عدد طبيعي n

1) أحسب J_0 ، I_0

2) بين أن $I_n + nJ_n = 1$ و $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$ ثم استنتج I_n ، J_n

حساب التكامل

7

نعتبر التكاملات التالية :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad و \quad J=\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} \quad و \quad K=\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx \quad و \quad L=\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{(x^2+4x+5)^2}dx$$

1) أحسب I

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $2J=I+\frac{1}{2}$ ثم استنتج J

3) أ- بين أن $-K=-I+2J$ ثم أحسب K

ب- بوضع $t=\arctan x$ أحسب مرة أخرى K

4) أحسب التكامل L (ضع $t=x+2$)

8

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$ و $I_0=\int_1^e x\,dx$

1) أحسب التكاملين I_0 , I_1

2) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 2I_{n+1}=e^2-(n+1)I_n$

ب- استنتج I_2

3) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ I_{n+1}\leq I_n$

ب- استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$ ثم حدد نهاية I_n و نهاية nI_n

9

1)- لتكن f الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

أ- أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$

ب- استنتج حساب التكامل $A=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

2) نعتبر التكاملين $B=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$ و $C=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

أ- باستعمال مكاملة بأجزاء عبر عن B بدلالة C

ب- أثبت أن $A+C=B$

ج- استنتج حساب B ; C

10

أحسب نهاية كل من المتتاليات التالية :

(1) $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n^2+nk}}$ (2) $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n}{n^2+k^2}$ (3) $U_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{k}$

(4) $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ (5) $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sqrt[n]{2^k}}{n}$ (6) $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n(2n-k)}}$

(7) $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k}$ (8) $U_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ (9) $U_n=\frac{1}{(n+1)^4}\sum_{k=1}^{k=n}k^3$