التمرين الأول :

أحسب مايلي :

$\int_{-1}^{2} x\left\|x-1\right\| \, dx$	$\int_{-1}^{0} \frac{t\,dt}{\left(2t^2+1\right)^3}$	$\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}} \, dx$	$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \, dx$
$\int_{0}^{1} \frac{t^3-3t}{\left(t+1\right)^2} \, dt$	$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2-2x+1}$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$	$\int_{1}^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{x^4+1} \, dx$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$	$\int_{2}^{4} \frac{dt}{1-t^2}$	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)} \, dx$	$\int_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{9+4x^2}$

التمرين الثاني :

باستعمال مكاملة بالأجزاء حدد التكاملات التالية

$\int_{0}^{\pi} x^2 \cos x \, dx$	$\int_{0}^{1} \ln\left(1+x^2\right) dx$	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
$\int_{0}^{\pi} e^x \cos x \, dx$	$\int_{1}^{3} \left(2x-1\right)\ln x \, dx$	$\int_{1}^{2} \left(2x-1\right)e^x \, dx$

التمرين الثالث :

أحسب مايلي :

$\int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{\left(x^2+1\right)^3}$ نضع $t = x^2$	$\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{2t-1}}{t} dt$ نضع $x = \sqrt{2t-1}$
$\int_{2}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ نضع $t = \sqrt{x-1}$	$\int_{1}^{4} \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$ نضع $t = \sqrt{x}+1$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ نضع $t = \tan\frac{x}{2}$	$\int_{1}^{4} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ نضع $x = \sqrt{t}$

التمرين الرابع :

1) أ- حدد العددين a , b بحيث : $\frac{2x-5}{\left(x-1\right)^3} = \frac{a}{\left(x-1\right)^2} + \frac{b}{\left(x-1\right)^3}$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}-\left\{1\right\}\right)$

ب- استنتج التكامل $\int_{2}^{3} \frac{2x-5}{\left(x-1\right)^3} dx$

2) أ- حدد العددين a , b بحيث : $\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)$

ب- استنتج التكامل $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx$

ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2}dx$

التمرين الخامس :

لكل عدد طبيعي n نعتبر الدالة φ_n المعرفة بما يلي : $\varphi_n(x)=(1-x)^n e^{-2x}$ و نضع $I_n=\int_{0}^{1}\varphi_n(x)\,dx$

1) أحسب I_0 و I_1

2) أ- بين أن $(I_n)_n$ متتالية تناقصية

ب- بين أن $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) أ- بين أن $2I_{n+1}=1-(n+1)I_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=1$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} n(nI_n-1)$

التمرين السادس

لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_{0}^{1}x^n\sqrt{1-x}\,dx$ و $I_0=\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\,dx$

1) أحسب التكاملين I_1 ; I_0

2) أ- بين أن المتتالية $(I_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

ب- بين أن $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) أ- بين أن $0\le\sqrt{2}-\sqrt{x+1}\le\frac{1}{2}(1-x)$ $\left(\forall x\in[0,1]\right)$

ب- استنتج أن $\frac{\sqrt{2}}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

التمرين السابع :

لكل عدد طبيعي n و بحيث $n\ge 2$ نضع $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1) أ- بين أن $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln x\,dx\le\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ $\left(\forall k\in\{1,\ldots.,n\}\right)$

ب- استنتج أن $U_n\le\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\;dx\le U_n+\frac{\ln n}{n}$ $(\forall n\ge 1)$

2) أ- بين أن $-1+\frac{1}{n}\le U_n\le -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$ $(\forall n\ge 2)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e}$