التمرين رقم 1

أحسب التكاملات التالية : $\int_{1}^{2} x e^{x^2}\, dx$ ، $\int_{1}^{\ln 3} \frac{1}{x^2} e^{\frac{2}{x}}\, dx$ ، $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} dx$ ، $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2x\, dx$

، $\int_{0}^{1} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ ، $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^3} dt$ ، $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ، $\int_{-1}^{0} \frac{x^4}{x^2+1} dx$

التمرين رقم 2

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب ما يلي : $\int_{1}^{2} \frac{\ln\left(1+x\right)}{x^2} dx$ ، $\int_{0}^{1} x\ln\left(x+1\right) dx$ ، $\int_{0}^{\pi} e^{x} \sin x\, dx$

$\int_{1}^{2} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ ، $\int_{1}^{2} \left(3-2x\right)\ln x\, dx$ ، $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (حدد مشتقة $x \to \sqrt{x^2+1}$)

التمرين رقم 3

باستعمال تغيير المتغير أحسب ما يلي : $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3} dx$ ضع $t = x^2$ ، $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{2t-1}}{t} dt$ ضع $x = \sqrt{2t-1}$

$\int_{2}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} dx$ ضع $t = \sqrt{x-1}$ ، $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx$ ضع $t = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ ضع $t = \tan\frac{x}{2}$ ، $\int_{0}^{1} x\sqrt{\frac{1-x}{1-x}}\, dx$ ضع $x = \cos t$ و $t \in \left[0,\pi\right]$

التمرين رقم 4

نعتبر التكاملين $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x} dx$ و $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} dx$

1) بين أن $I = J$ يمكن وضع $t = \frac{\pi}{2} - x$

2) استنتج قيمة كل من I , J

التمرين رقم 5

1) تحقق أن $\left(1-x\right)^3 + \left(1+x\right)^3 = 2+6x^2$

2) استنتج قيمة التكامل : $\int_{0}^{\pi} \left(\sin^6 t + \cos^6 t\right) dt$

التمرين رقم 6

1) تحقق أن $\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$

2) أحسب التكامل : $I = \int_{0}^{1} \frac{1}{\left(e^x+1\right)^2} dx$

3) أ- حدد دالة أصلية للدالة $x \to \dfrac{e^x}{(e^x+1)^3}$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء حدد $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(e^x+1)^3}dx$

التمرين رقم 7

لكل عددين طبيعيين p , q نضع $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q\, dt$

1) قارن $I(p,q)$ و $I(q,p)$

2) بين العلاقة $I(p,q) = \dfrac{p}{q+1} I(p-1,q+1)$

3) أحسب $I(0,n)$ و استنتج $I(p,q)$

التمرين رقم 8

لتكن f ; g دالتين متصلتين على مجال $[a,b]$ و بحيث $g(x) > 0$ $(\forall x \in [a,b])$

بين أن $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \times \int_a^b g(x)dx$ $(\exists c \in [a,b])$

التمرين رقم 9

1) حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = e^x$ على المجال $[-1,1]$

2) حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sin x$ على المجال $[0,\pi]$

التمرين رقم 10

نعتبر التكاملين $I = \displaystyle\int_{-1}^1 t \arctan t\; dt$ و $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t\ \arctan t}{1+e^t}dt$

1) أحسب I

2) بين أن $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^t t\ \arctan t}{1+e^t}dt$

3) استنتج أن $I = 2J$ ثم حدد قيمة J

التمرين رقم 11

1) بين أن $1 - t \le \dfrac{1}{1+t} \le t$ $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$

2) استنتج أن $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ $(\forall x > 0)$

التمرين رقم 12

نضع $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{k}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$

2) بين أن $U_n \ge \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ثم استنتج $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$

التمرين رقم 13

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

1) بين أن $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

2) استنتج أن $\int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

3) بين أن $\left(\frac{S_n}{n^{\frac{2}{3}}}\right)_{n\geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتها a

4) نضع $U_n = S_n - an$ بين أن $(U_n)_{n\geq1}$ متتالية محدودة و أنها متقاربة

التمرين رقم 14

نعتبر الدالة $h(x) = \frac{1}{3}\left(2e^{2x} + e^{-x}\right)$ و نضع $a_n = \int_0^1 \frac{h(t)}{1+nt}dt$ و $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{4e^{\frac{3k}{n}} - 1}{2e^{\frac{3k}{n}} + 1}$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; 0 \leq a_n \leq h(1)\int_0^1 \frac{dt}{1+nt}$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty} a_n$

2) بين أن $(\forall \in \mathbb{N}^*) \;:\; w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{h'\left(\frac{k}{n}\right)}{h\left(\frac{k}{n}\right)}$ و استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ln\left(\frac{2e^3+1}{3e}\right)$

التمرين رقم 15

2) لتكن u دالة متصلة و فردية على المجال $[-a,a]$ بحيث $a \in \mathbb{R}^{+*}$

أ- أثبت أن : $\int_{-a}^{0} u(t)dt = -\int_0^a u(t)dt$ واستنتج أن $\int_{-a}^{a} u(t)dt = 0$

ب- لتكن g دالة متصلة على $[0,1]$ بين أن

و أن $\int_0^\pi xg(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi g(\sin x)\,dx$

ج- احسب $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

2) نضع $u_n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{k}{n^2}}$ أحسب $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(u_n)\right)$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين رقم 16

1) بين أن : $\frac{1}{3+t^2} + \frac{t}{3+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

2) بين أن : $\left(\forall \alpha \in \mathbb{R}\right) : \int_0^\alpha \frac{1}{3+t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\tan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$

3) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,\pi]$ بما يلي : $F\left(x\right) = \int_0^x \frac{1+\sin U}{2+\cos u}\, du$

أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$

ب- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t = \tan\frac{u}{2}$ بين أن : $\forall x \in \left[0,\pi\right[\;: F\left(x\right) = 2\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{\left(1+t\right)^2}{\left(1+t^2\right)\left(3+t^2\right)}\, dt$

ج- باستعمال السؤالين 1) و2) بين أن : $\forall x \in \left[0,\pi\right[: F\left(x\right) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$

د- باستعمال اتصال الدالة بين أن $\int_0^\pi \frac{1+\sin U}{2+\cos u}\, du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

التمرين رقم 17

1) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^n}$

أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right) : \mathrm{I}_n = \frac{1}{(n-1)2^n} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$

ب- أحسب I_1 واستنتج I_3

2) أ- حدد الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث :

$$\left(\forall t \in \left[0,1\right]\right) : \frac{\left(1-t^2\right)^3}{\left(1+t^2\right)^3\left(1+3t^2\right)} = \frac{a}{1+3t^2} + \frac{b}{1+t^2} + \frac{ct}{\left(1+t^2\right)^3}$$

ب- أحسب التكامل $J = \int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^3}{\left(1+t^2\right)^3\left(1+3t^2\right)} dt$

ج- بوضع $t = \tan\frac{x}{2}$ أحسب التكامل $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2-\cos x} dx$

التمرين رقم 18

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_1^e (\ln x)^n\, dx$

1) بين أن $(I_n)_n$ تناقصية

2) أ- احسب التكامل I_1

ب- بين أن $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\; I_{n+1} = e - (n+1) I_n$ ثم استنتج I_2 ; I_3

3) أ- بين أن $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\; I_n \geq 0$

ب- بين أن $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\; I_n \leq \frac{e}{n+1}$ ثم حدد نهاية I_n

ج- أحسب $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ ثم حدد نهاية nI_n

التمرين رقم 19

نضع $I_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-x)^2}dx$ و $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^n}{(1-x)^{n+2}}dx$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) أحسب I_0

2) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t=1-x$ أحسب I_1

3) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $I_n=\frac{-1}{2^n(n+1)}+\frac{n}{n+1}I_{n-1}$

ب- بين أن $I_n=\frac{1}{2^n(n+1)}$

التمرين 20

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(1-x)e^{2x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أدرس رتابة الدالة f و أنجز جدول التغيرات

3) بين المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها

4) أرسم المنحنى (C_f)

5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$; $x=1$

(II) لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^{2x}\,dx$

1) أ- بين أن $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{e^2}{n+1}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$

ب- بين أن $2I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n$

2) نضع $U_n=\frac{2^n}{n!}I_n$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

أ- بين بالترجع أن $\frac{2^{n-1}}{n!}\le 1$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ و استنتج أن $U_n\le\frac{2e^2}{n+1}$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3) أ- بين أن $U_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+U_n$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ب- بين أن لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $U_n=\frac{1}{2}\left(e^2-\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

ج- استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$