دروس الدعم و التقوية ما دة الرياضيات	تمارين درس : حساب التكامل الصفحة 1	الأستاذ : علي الشريف قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية.

التمرين رقم 1 :

أ حسب التكاملات التالية :

1) $\int_0^2 (1-|x-1|^3)dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x(\sin x+\sin^3 x)dx$

3) $\int_{-1}^{1} (x-2x^3)dx$; 4) $\int_0^{\pi} \cos^3 x\sin x dx$

5) $\int_0^1 x^2\sqrt{x}dx$; 6) $\int_1^2 \frac{x+1}{x}dx$

7) $\int_1^2 (x^3-\frac{1}{x^2}+2)dx$; 8) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$

9) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$ $(t=\sqrt{2x+1})$

10) $\int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+t^2}dt$ 11) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t3}{\sqrt{1+t2}}dt$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt : [\sin^3(x)=\sin x(1-\cos^2(x)]$

13) $\int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx$ 14) $\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx$

15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x-\frac{\pi}{3})dx$ 16) $\int_1^e x^5\ln x dx$

17) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $(x=\sin t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right])$

18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).\sin^3(x)dx$ 19) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos(3x)dx$

20) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$; $(u=x^2)$ 21) $\int_0^1 (x^2+x)dx$

22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$; 23) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}dx$; $(t=x+1)$

25) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x+\frac{\pi}{6})dx$; 26) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x+1)\cos(3x)dx$

التمرين رقم 2 :

أ حسب التكاملات I و J و K و L حيث :

$$I=\int_1^2 \frac{x^4-3x^3+2}{x^2}dx$$

$$J=\int_{-2}^{0} (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}dx$$

$$K=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-2}{4}} (x+1)\sin(2x+1)dx$$

$$L=\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx \quad (t=\frac{x+1}{2})$$

التمرين رقم 3 :

نعتبر الدالة : $f(x)=\frac{x^2-5x+3}{(x+1)(x-2)^2}$

أ ثبت أ ن لكل x من IR $(x\neq 2 ; x\neq -1)$

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x-2)^2}$$

أ حسب: $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين رقم 4 :

1) تحقق أ ن : $\forall t\in IR-\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$:

$$\frac{t}{2t^2+3t-2}=\frac{1}{5}(\frac{2}{t+2}+\frac{1}{2t-1})$$

2) أ حسب التكامل التالي: $\int_1^4 \frac{t}{2t^2+3t-2}dt$

3) ا ستنتج قيمة التكامل : $\int_0^5 \frac{1}{2x+\sqrt{3x+1}}dx$

باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $(t=\sqrt{3x+1})$

التمرين رقم 5 :

1) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع u=2x

أ حسب التكامل : $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1}dx$

2) أ حسب التكامل : $J=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(4x^2+1)^2}dx$

3) استنتج قيمة التكامل : $K=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2+x+1}{(4x^2+1)^2}dx$

التمرين رقم 6 :

1)حدد الأ عداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون لكل x من : $IR-\{-1;0;1\}$

$$\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$

2) حدد دالة أ صلية , على المجال $]1,+\infty[$, للدالة f المعرفة على $]1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$

3) أ حسب : $I=\int_2^3 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$ (م. بالأجزاء)

التمرين رقم 7 :

أ حسب التكاملات التالية :

1) $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x\sin x\,dx$, 2) $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 2x\,dx$

3) $K=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx$, 4) $D=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,\mathrm{Cos}3x\,dx$

5) $H=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ (ضع : $x=\mathrm{Sin}\,t$ $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

6) $I=\int_0^2\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}dx$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x+1}$)

7) $J=\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$, 8) $k=\int_0^1\frac{\mathrm{Arctan}x}{1+x^2}dx$

9) $H=\int_0^1\mathrm{Arc}\tan x\,dx$ (المكاملة بالأجزاء)

10) $I=\int_0^1\frac{1}{x^2+2x+5}dx$, 11) $K=\int_0^{\frac12}\mathrm{Arc}\sin t\,dt$

12) $K=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\tan^3 x}dx$, 13) $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Sin}^5x\cos^3 x\,dx$

14) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Sin}^2x\cos^3 x\,dx$, $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{Sin}^4x\mathrm{Sin}2x\,dx$

التمرين رقم 8 :

1) بين $(\forall y\in IR_+^*): \frac{y^3}{y+1}=(y+1)^2-3(y+1)-3-\frac{1}{y+1}$

ب- استنتج حساب التكامل: $I=\int_1^2\frac{y^3}{y+1}dy$

2) أحسب التكامل: $J=\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ ($y=\sqrt[6]{x}$)

التمرين رقم 9 :

نعتبر الدالتين: $u(x)=\sqrt{1+x^2}$ و $v(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1) لكل x من IR , أحسب : $u'(x)$ و $v'(x)$

2) α من IR نضع : $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

باستعمال التكامل بالأ جزاء أحسب : $I(\alpha)$

3) أحسب التكامل : $J=\int_1^e\frac{(\ln t)^3}{t(1+\ln t)^2\sqrt{1+(\ln t)^2}}dt$

التمرين رقم 10:

نعتبر الدالة المعرفة علىIR ب : $f(x)=\sin^4(x)$

1) عبر عن $\sin^2(x)$ و $\cos^2(x)$ بدلالة $\cos(2x)$

2) عبر عن $\sin^4(x)$ بدلالة $\cos(2x)$ و $\cos(4x)$

3) أحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{8}}f(x)dx$

التمرين رقم 11:

1-أ بين أن $(\forall x\in IR): x^2+x+1=\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)^2\right]$

ب- بين أن : $I=\int_{\frac{\sqrt3-1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{2\sqrt3}{3}.\frac{\pi}{12}$

(ضع : $t=\frac{2x+1}{\sqrt3}$)

2) أ - نضع لكل x من IR*: $A=\frac{1}{x(x^2+x+1)}$

بين أن : $A=\frac{1}{x}-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}$

ب- أ حسب التكامل : $J=\int_{\frac{\sqrt3-1}{2}}^{1}\frac{1}{x(x^2+x+1)}dx$

3) أحسب : $K=\int_{\frac{\sqrt3-1}{2}}^{1}\frac{(2x+1)\ln(x)}{(x^2+x+1)^2}dx$ (م.بالأجزاء)

التمرين رقم 12:

لكل عدد صحيح طبيعي n نعتبر التكاملين :

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\sin(x)dx$ و $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\cos(x)dx$

1) أحسب : I_0 و J_0

2) أبين أن $n\in IN^*$; $\begin{cases}I_n+nJ_n=1\\ -nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}}\end{cases}$ (م.بالأجزاء)

ب- استنتج I_n و J_n بدلالة n .

3) أحسب النهايتين : $\lim_{n\to+\infty}I_n$ و $\lim_{n\to+\infty}J_n$

التمرين رقم 13:

لكل عدد ص.ط n نعتبر: $I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin(x)dx$

1) بين أن: $I_n=(-1)^n.e^{-n\pi}.\frac{e^{-\pi}+1}{2}$ (م.بالأجزاء)

2) بين أن $(I_n)_{n\in IN}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأ ول

التمرين رقم 14:

نعتبر $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $u_n=\int_1^2 e^{-nt^2}dt$

1) بين أن : $\forall n\in IN;\forall t\in[1,2]:0\le e^{-nt^2}\le e^{-nt}$

2) استنتج أن : $\forall n\in IN:\ 0\le u_n\le\frac{e^{-n}-e^{-2n}}{n}$

3) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$.

التمرين رقم 15:

نعتبر المتتالية $(I_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب :

$$I_0=\int_0^1\sqrt{1+t}\,dt\ ,\ I_1=\int_0^1 t.\sqrt{1+t}\,dt\ ,\ ....$$

$$I_n=\int_0^1 t^n.\sqrt{1+t}\,dt\quad ,\ ....$$

1) أحسب I_0 , ثم أحسب I_1 بإستعمال المكاملة بالأجزاء .

2) قارن t^n و t^{n+1} بحيث $0\le t\le 1$ ثم إستنتج رتابة المتتالية I_n .

3) بإستعمال تأطير مناسب للعدد $\sqrt{1+t}$ بين أن :

$$\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{\sqrt2}{n+1}$$

4)أ- بين أن لكل t من المجال $[0;1]$:

$$0\le\sqrt2-\sqrt{1+t}\le\frac12(1-t)$$

ثم إستنتج أن : $$\frac{\sqrt2}{n+1}-\frac{1}{2n^2}\le I_n\le\frac{\sqrt2}{n+1}$$

ب- حدد : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

التمرين رقم 16:

ليكن m و n عدد ين صحيحين طبيعيين .

نضع : $$I(m;n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

1) أحسب : $I(m;0)$

2) $n\ge1$ بين أن $I(m;n)=\frac{n}{m+1}I(m+1;n-1)$

3) إستنتج أن : $I(m;n)=\frac{m!n!}{(m+n)!}I(m+n;0)$

ثم : $$I(m;n)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

التمرين رقم 17:

نعتبر : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^n\,dx$ و $J_n=\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n\,dt$

1)أحسب I_0 و I_1 . ثم عبر عن I_{n+2} بدلالة I_n .

2) أحسب J_0 و J_1 . ثم عبر عن J_{n+2} بدلالة J_n .

التمرين رقم 18:

لكل n من IN* نضع : $$J_n=\int_1^e \ln(x)^n.dx$$

1)أ- بين أن $\forall x\in]1;e[,\forall n\in IN:(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}>0$

ب- إستنتج رتابة المتتالية (J_n) .

ت- بين أن : $\forall n\in IN^*\ ,J_n>0$

ثم إستنتج أن المتتالية (J_n) متقاربة .

2) أ- أحسب : J_1 .

ب- بين أن: $\forall n\ne0, J_{n+1}=e-(n+1).J_n$ م.بالأجزاء

ت- إستنتج قيم : J_2 , J_3 , J_4

ثم أعط قيم مقربة لكل منها إلى 10^{-3} .

3)أ- بين أن : $\forall n\ne0\ :\ e>(n+1).J_n$

ثم إستنتج نهاية المتتالية (J_n)

ب- ما هي قيمة : $n.J_n+(J_n+J_{n+1})$

إستنتج نهاية المتتالية $(n.J_n)$

التمرين رقم 19:

لكل ع. ص.ط n نعتبر: $I_n=\int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$

1) أحسب : $I_0=\int_1^e x^2\,dx$

2) با ستعمال المكاملة بالأ جزاء أحسب : I_1

3) بين أن: $\forall n\in IN\ :3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$

4) استنتج: I_2

5) بين أن : $\forall n\in IN\ :I_n\ge0$

6) استنتج من 3) أن : $\forall n\in IN^*\ :I_n\le\frac{e^3}{n+1}$

7) أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$

التمرين رقم 20:

نعتبر $(u_n)_{n\in IN}$ بحيث : $u_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx$

1) أحسب : $u_0=\int_0^1\ln(x+1)\,dx$ و u_1

2) بين أن : $\forall n\in IN:\ 0\le u_n\le\frac{\ln2}{n+1}$

3) أد رس نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$.

التمرين رقم 21:

نعتبر n عدد ص. نسبي و x حقيقي بحيث $n\ne-1$ و $x\ge1$

1)أ – أحسب : $I_n(x)=\int_1^x t^n(\ln t)\,dt$ (م.بالأجزاء)

ب- إستنتج: $J_n(x)=\int_1^x t^n(\ln t)^2\,dt$

2) أ – أحسب : $I_n(e)-J_n(e)$

ب- أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$

التمرين رقم 22:

نعتبر التكاملين:

$$I=\int_0^{\frac\pi2}\frac{\mathrm{Sinx}}{\mathrm{Sinx}+\mathrm{Cosx}}\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_0^{\frac\pi2}\frac{\mathrm{Cosx}}{\mathrm{Sinx}+\mathrm{Cosx}}\,dx$$

1) أحسب I+J و I-J.

2) استنتج قيمة كل من I و J .

التمرين رقم 23:

نعتبر: $\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} \;; n\in IN \text{ و } x\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ f_n(0)=2n+2 \end{cases}$

نضع : $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.

1-A) بين أن f_n متصلة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

استنتج أن المتتالية (u_n) معرفة على IN .

2) بين أن : $u_{n+1}-u_n=2\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$

3) أحسب u_0 و u_1 و u_2 .

1-B) بين أن $u_n=2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

2) أحسب $\int_0^1 dx$ و $\int_0^1 x^{2k}dx$ من أجل k في IN^* .

استنتج أن: $u_n=2\int_0^1\frac{1-(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$.

3) بين أن $\left|u_n-2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right|\le\frac{2}{2n+3}$.

استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين رقم 24:

لكل n من IN^* نضع $I_n=\frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1(1-t)^n e^{\frac{t}{2}}dt$.

1) احسب I_1 .

2) بين أن : $\forall n\in IN^*: I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2^{n+1}.(n+1)!}$

3) آستنتج أن: $\forall n\in IN^*: \sqrt{e}=1+\frac{1}{2}.\frac{1}{1!}+.......+\frac{1}{2^n n!}+I_n$

بين أنه يوجد A في IR بحيث: $0\le I_n\le\frac{1}{2^n n!}A$.

و استنتج: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}.\frac{1}{1!}+....+\frac{1}{2!}.\frac{1}{n!}\right)$

التمرين رقم 25:

1) احسب مشتقة f: $\forall x\in IR, f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

2) $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+1}}$ و $J_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $n\in IN$

أ حسب I_0 و I_1 .

3) بين أن $\forall n\in IN \;,\; 0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ و أن $(I_n)_{n\ge0}$ متقاربة و حدد نهايتها.

4) حدد $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

5) بين أن $\forall n\in IN: I_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}+\frac{1}{n+1}J_n$.

آستنتج $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$.

التمرين رقم 26:

1) لتكن Q_{n-2} ($n\in IN$ و $n\rangle 2$) (t متغير)

الدالة المعرفة ب: $Q_{n-2}(t)=1-t+t^2....+(-1)^{n-2}t^{n-2}$

بين أن : $\forall t\in IR-\{-1\}: Q_{n-2}(t)=\frac{1-(-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}$

آستنتج أن $\forall t\in IR-\{-1\}$:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+.....+(-1)^{n-2}t^{n-2}+(-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{1+t}$$

و أن : $\forall x\in[0,1]: \ln(1+x)=P_{n-1}(x)+(-1)^{n-1}+\int_0^x\frac{t^{n-1}}{1+t}dt$

حيث : $P_{n-1}(x)=x-\frac{x^2}{2}+.......+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$

2أ) φ دالة معرفة ب: $\forall x\in]0,1]: \varphi(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$.

بين أن φ تقبل تمديدا بالإتصال في 0^+ الدالة f بحيث:

$$\begin{cases}\forall x\in]0,1]: f(x)=\varphi(x)\\ f(0)=1\end{cases}$$

ب) بين أنه: $\forall x\rangle 0 : x-\ln(1+x)\langle 0$

و استنتج أن: $\forall x\rangle 0 : f(x)\le 1$

ج) نضع: $L=\int_0^1 f(x)dx$.

بين أنه: $\forall n\in IN^* : 0\le\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx\le\frac{1}{n}$

و حدد: $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx$ ثم بين أن $\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx=L$.

3أ) بين أن $\forall x\in[0,1]: \int_0^x\frac{t^{n-1}}{1+t}dt\le\int_0^x t^{n-1}dt$.

و آستنتج أن $\forall x\in[0,1]: \int_0^x\frac{t^{n-1}}{1+t}dt\le\frac{1}{n}$

و أن: $-\frac{1}{nx}\le f(x)-\frac{P_{n-1}(x)}{x}\le\frac{1}{nx}$

بين أن:

$$(II)\begin{cases}\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+S_n\left(\frac{1}{n}\right)\le S_n(1)\\ S_n(1)\le\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+S_n\left(\frac{1}{n}\right)\end{cases}$$

$$\forall n\ge 2\;\; S_n(x)=x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+....+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$$

ب) بين أن: $\forall p\in IN^*, \forall x\in[0,1]: \frac{x^p}{p^2}\ge\frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$

لاحظ أن $S_2(x)=x$. $S_3(x)=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$. $S_4(x)=\left(x-\frac{x^2}{2^2}\right)+\frac{x^3}{3^3}$

$x-S_3(x)=\frac{x^2}{2^2}$. $x-S_4(x)=\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}$. $x-S_5(x)=\left(\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}\right)+\frac{x^4}{4^2}$

حدد $\lim_{n\to+\infty}S_n\left(\frac{1}{n}\right)$. (بين أن ↑)

ج) استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}S_n(1)=\int_0^1 f(x)dx$

التمرين رقم 27:

(A)(1) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) بحيث:

$$\begin{cases} u_1 \\ u_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{n^2} ; n\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{(n-1)^n} , n\neq 0 \end{cases}$$

(a حدد a و b في IR : $\forall n\in IN^*: \frac{1}{(n-1)n}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n}$

استنتج v_n بدلالة n .

(b بين أن (u_n) تزايدية و أن $\forall n\in IN^* : u_n\le v_n$.

حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(B) (1) لكل t من $[0,\pi]$ و لكل n من IN^* نضع

$C_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$ و $S_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\sin(kt)$.

احسب $C_n(t)+i.S_n(t)$.

استنتج أن:

$$\begin{cases} \forall t\in]0,\pi] : C_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}} \\ C_n(0)=n \end{cases}$$

(b هل الدالة C_n متصلة على $[0,\pi]$ ؟

(2 تحقق من أن: $\forall t\in]0,\pi] : 1+2C_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}$

و بين أن الدالة من $[0,\pi]$ نحو IR : $f(t)=1+2C_n(t)$. تقبل تمديدا g_n بالإتصال على $[0,\pi]$.

(3 بين أن : $\forall n\in IN^* : \int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\,dt=\frac{1}{n^2}$

و استنتج أن : $u_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)C_n(t)dt$

(4 احسب $\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)dt$

وبين أن: $\forall n\in IN^* : \frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)dt$

(C) نعتبر الدالة:

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\frac{t}{2}} , \; 0\langle t\le\pi \\ f(0)=2 \end{cases}$$

(1 بين أن f متصلة على $[0,\pi]$ و أنه يوجد M في IR .

بحيث: $\forall t\in[0,\pi] : 0\le f(t)\le M$

(2 ليكن α عنصرا من $]0,\pi[$.

(a بين أن $\forall n\in IN \left|\int_0^\alpha f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right|\le \alpha M$.

(b بين أن f ق. للإش على $[\alpha,\pi]$ و f' متصلة على $[\alpha,\pi]$

و أنه يوجد M' في IR بحيث:

$\forall t\in[\alpha,\pi] , |f'(t)|\le M'$

(c نضع $I_n=\int_\alpha^\pi f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$: n في IN .

بين أن $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$ (استعمال بالتكامل بالأجزاء)

(3 استنتج مماسبق أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi^2}{6}-u_n\right)=0$.

التمرين رقم 28:

F معرفة على IR^{*+} ب : $F(x)=\int_{2x}^{3x}\frac{t-e^t}{t^2}dt$

(1 بين أن :

$$(\forall x\in IR^{*+}) : F(x)=\left[\frac{e^t-1}{t}\right]_{2x}^{3x}-\int_{2x}^{3x}\frac{e^t}{t}dt$$

(2 بين أن:

$$(\forall x\in IR^{*+}) : e^{2x}\int_{2x}^{3x}\frac{dt}{t}\le\int_{2x}^{3x}\frac{e^t}{t}dt\le e^{3x}\int_{2x}^{3x}\frac{dt}{t}$$

(3 آستنتج : $\lim_{\substack{x\to0\\ x\rangle0}}F(x)$

التمرين رقم29:

نعتبر التكامل $I=\int_0^1 f(t)dt$ حيث $f(t)=\sqrt{t}$.

و الأعداد $x_i=\frac{i}{n}$ حيث $i\in\{0,1,....,n\}$.

بين أن: $\forall i\in\{1,2,....,n\}$

$$\frac{1}{n}f(x_{i-1})\le\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)dt\le\frac{1}{n}f(x_i)$$

و آستنتج تأطيرا للعدد I.

حدد: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

التمرين رقم30:

نعتبر الدالة: $F(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t^2+|t|+1}}dt$

و نضع: $f(t)\frac{1}{\sqrt{t^2+|t|+1}}$

(1 بين أن F معرفة على IR و أنها فردية.

(2 بين أن: $\forall t\ge0 : \frac{1}{t+1}\le f(t)\le t$

و استنتج أن: $\forall x\ge0 : F(x)\le x$

و أن: $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

(3 بين أن $f(t)\le\frac{1}{t}$ و استنتج $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

(4 ادرس تغيرات F و أنشىء منحناها.