

I. تقديم الدالة  $f(x) = \exp(x) = e^x$  (الأسية النيبيرية):

تقديم الدالة الأسية النيبيرية :

$$f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

1. نشاط: لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب:

$$x \rightarrow f(x) = \ln(x)$$

• هل  $f$  تقابل من المجال  $I = ]0, +\infty[$  إلى مجال  $J$ ؟ علل جوابك مع تحديد  $J$ .

## 2. مفردات:

الدالة العكسية  $f^{-1}$  لـ  $f$  تسمى الدالة الأسية النيبيرية (أو الدالة الأسية) ويرمز لها ب:  $\exp$  أو  $e$ 

$$f^{-1} = \exp = e: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

ولهذا نكتب:

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$$

## 3. تعريف و خاصية:

الدالة العددية المعرفة ب:  $f(x) = \ln(x)$  متصلة و تزايدية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$  الدالة  $f(x) = \ln(x)$  تقابل من  $]0, +\infty[$ إلى  $\mathbb{R}$ . الدالة العكسية  $f^{-1}$  لـ  $f$  تسمى الدالة الأسية النيبيرية (أو الدالة الأسية) ويرمز لها ب:  $\exp$  أو  $e$ 

$$f^{-1} = \exp = e: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

الدالة الأسية معرفة كما يلي :

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$$

## 4. ملحوظة:

العلاقة التي تربط  $f(x) = \ln(x)$  و  $f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$  هي  $\left. \begin{array}{l} \exp(x) = e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{array} \right.$ لدينا:  $\forall x \in ]0, +\infty[ : f^{-1} \circ f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = x$  إذن:  $\forall x \in ]0, +\infty[ , \exp \circ \ln(x) = x \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) = x$ لدينا:  $\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = x$  إذن:  $\forall x \in \mathbb{R} , \ln \circ \exp(x) = x \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = x$ .

## 5. كتابة جديدة :

نعلم أن:  $\forall r \in \mathbb{Q} , r = \ln(e^r)$  (1) إذن:  $\forall r \in \mathbb{Q} , \exp(r) = e^r \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{Q} , \exp(r) = \exp(\ln(e^r)) \Leftrightarrow (1)$ ومنه نحصل على:  $\forall r \in \mathbb{Q} : \exp(r) = e^r$ وهذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية  $x$  ومنه: نكتب  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$ 

## 6. نتائج:

| الدالة $f(x) = \exp(x) = e^x$                                   |   |   |
|---|---|---|
| $\forall x > 0 : e^{\ln(x)} = x$                                | 5 | 1 معرفة على $D_f = \mathbb{R}$  |
| $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$                       | 6 | 2 متصلة على $D_f = \mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R}$  |
| $\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$ | 7 | 3 تزايدية قطعاً على المجال $D_f = \mathbb{R}$ .   |
| $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$ | 8 | 4 $\left. \begin{array}{l} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{array} \right.$ |



## 7. أمثلة :

$$1. e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$2. e^{\ln(24)} = 24 \text{ و } \ln(e^{-13}) = -13 \text{ و } e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$3. e^{x+1} < e^{6x-2} \Leftrightarrow x+1 = 6x-2 \text{ و } e^{x+3} = e^{2x+7} \Leftrightarrow x+3 = 2x+7$$

8. إشارة  $e^x$  :

|       |           |           |
|-------|-----------|-----------|
| x     | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $e^x$ | +         |           |

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0 \text{ (إشارة } e^x \text{ موجبة قطعا)}$$

## 9. تطبيق :

$$1. \text{ حدد مجموعة تعريف: } f(x) = \frac{2}{e^x} \text{ و } f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$2. \text{ حل المعادلة: } e^{2x} - e^{(x-1)} = 0$$

$$3. \text{ حل المتراجحة: } e^{2x} - e^{(x-1)} \leq 0$$

II. خاصيات  $f(x) = \exp(x) = e^x$ 

خاصيات جبرية :

## 1. خاصيات :

| مثال   | لكل $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$         | مثال                     | لكل $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$ |
|--|---------------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| $(e^x)^3 = e^{3x}$                           | $(e^x)^r = e^{rx} (r \in \mathbb{Q})$ | $e^7 = e^4 \times e^3$   | $e^{a+b} = e^a \times e^b$    |
| $\sqrt{e^{x-3}} = e^{\frac{1}{2}(x-3)}$      | $\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$       | $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ | $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$      |
| $\sqrt[3]{e^{2+2x}} = e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$ | $\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{3}x}$    | $e^5 = \frac{e^7}{e^2}$  | $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$   |

2. برهان ل  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ 

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  نضع :  $A = e^{a+b}$  و  $B = e^a \times e^b$  ومنه :

$$A = e^{a+b} \Leftrightarrow \ln(A) = \ln(e^{a+b})$$

$$\Leftrightarrow \ln(A) = a+b \quad , \quad (1)$$

$$B = e^a \times e^b \Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a \times e^b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a) + \ln(e^b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(B) = a+b \quad , \quad (2)$$

حسب (1) و (2) نحصل على  $\ln(A) = \ln(B)$  إذن :  $A = B$  أي  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ .

خلاصة :  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ 

## 3. ملحوظة :

الكتابة :  $e^x \times e^x \times e^x = (e^x)^3 = e^{3x}$  و  $e^x \times e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$ .

بصفة عامة :  $\underbrace{e^x \times e^x \times \dots \times e^x}_n = (e^x)^n = e^{nx}$



## III مشتقة الدالة الأسية:

## 1. خاصية:

الدالة  $f(x) = e^x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا :  $(e^x)' = e^x$  .  $\forall x \in \mathbb{R}$

بمأن الدالة  $f(x) = \ln(x)$  قابلة للاشتقاق على  $I = ]0, +\infty[$  . و دالتها المشتقة  $f'(x) = \frac{1}{x}$  لا تنعدم على هذا المجال فإن دالتها العكسية  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .

لدينا :  $(e^x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$  .  $\forall x \in \mathbb{R}$

خلاصة :  $(e^x)' = e^x$  :  $\forall x \in \mathbb{R}$

## 2. خاصية:

$u(x)$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن الدالة  $f(x) = e^{u(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و دالتها المشتقة تحقق ما يلي:

$$f'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$$

تطبيق: أحسب الدالة المشتقة ل:  $f(x) = e^{5x^3+3x}$

جواب :  $f'(x) = [e^{5x^3+3x}]' = (5x^3 + 3x) \times e^{5x^3+3x} = (15x^2 + 3)e^{5x^3+3x}$

## 3. ملحوظة:

الدوال الأصلية للدالة ل:  $g(x) = u'(x) e^{u(x)}$  هي الدوال التي على شكل:  $G(x) = e^{u(x)} + c$  ;  $(c \in \mathbb{R})$

## 4. تطبيق:

وجد الدوال الأصلية ل:  $f(x) = x \cdot e^{3x^2+1}$  هي  $F(x) = \frac{1}{6} e^{3x^2+1} + c$

IV نهايات اعتيادية ل  $f(x) = e^x$ 

## 1. نهايات اعتيادية

نهايات يجب معرفتها

|  |   |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0^-$                                | 1 |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$                                   | 2 |
| $(n \in \mathbb{N}^*)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \times e^x = 0$      | 3 |
| $n \in \mathbb{N}^*$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ | 4 |

|  |  |
|--|--|
| نهايات $f(x) = e^x$                                    | تأويل الهندسي لنتيجة   |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$               | الدالة $f$ تقبل مقارب أفقي معادلته: $y = 0$ (اي محور الأفاصيل) بجوار $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$           | ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$                                 |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ | الدالة $f$ تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ .             |

## 2. برهان:



أ - لنهاية اعتيادية : مثلا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  . ( يمكن استنتاج هذه النهاية من خلال  $f(x) = \ln(x)$  و دالتها العكسية  $f^{-1}(x) = e^x$  )

نضع :  $e^x = X$  إذن :  $x \rightarrow +\infty$  فإن :  $X \rightarrow +\infty$  وكذلك  $x = \ln(X)$  .

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

ب - لنهاية يجب معرفتها : مثلا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  مع  $n \in \mathbb{N}^*$

نضع :  $X = \frac{x}{n}$  إذن :  $x \rightarrow +\infty$  فإن :  $X \rightarrow +\infty$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{nX}}{(nX)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^X)^n}{(nX)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^X}{nX} \right)^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \left( \frac{e^X}{X} \right)^n = +\infty$

3. تطبيق 1 :

تطبيق 1 :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$

طريقة 1 :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \times e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times e^x = +\infty$

طريقة 2 :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$  مع  $t = 2x$

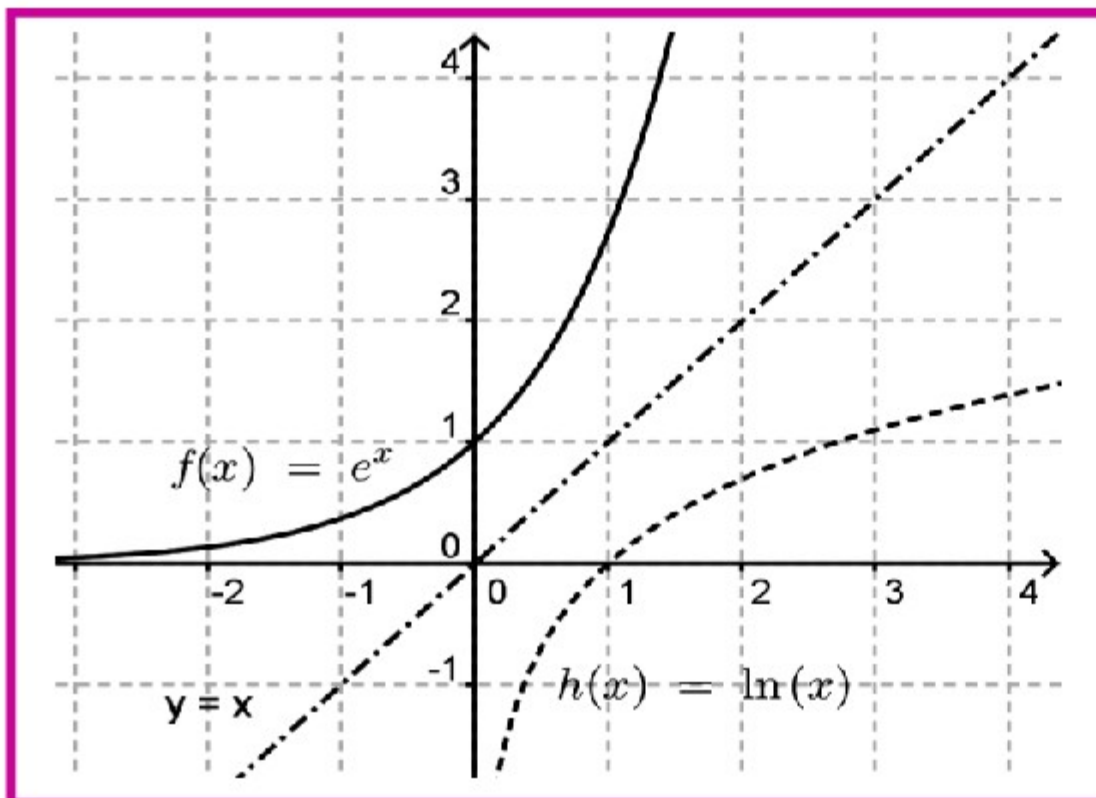
تطبيق 2 : أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x}{x^3}$

V. دراسة الدالة  $f(x) = e^x$  :

جدول تغيرات f :

|    |           |           |
|----|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | $+\infty$ |
| f' |           | +         |
| f  | 0         | $+\infty$ |

إنشاء منحنى الدالة f في م.م.م (0, i, j)





VI. الدالة الأسية للأساس  $a$  مع:  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

1. تعريف:

ليكن  $a$  من  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . الدالة المعرفة كما يلي:  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$   $\forall x > 0$ , هي متصلة ورتيبة قطعاً على  $]0, +\infty[$  هي

تقابل و تقابلها العكسي  $f^{-1}$  يسمى الدالة الاسية للأساس  $a$  و معرفة كما يلي :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = e^{x \ln a}$$

2. توضيح:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{x \ln(a)}$$

إن:  $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^{x \ln(a)} = y$

3. كتابة جديدة لـ  $f^{-1}(x) = e^{x \ln a}$

نأخذ:  $r$  من  $\mathbb{Q}$  نحصل على  $a^r = e^{r \ln a} = e^{\ln a^r} = a^r$

وهذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية  $x$  ومنه: نكتب  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = e^{x \ln a} = a^x$

خلاصة:  $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x \ln a} = a^x$

4. مثال:

$$5^x = e^{x \ln 5} \text{ و } \left(\frac{1}{5}\right)^x = e^{-x \ln 5} \text{ و } 10^x = e^{x \ln 10}$$

5. ملحوظة: لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $\log_a(a^x) = x$  و لكل  $x > 0$ :  $a^{\log_a(x)} = x$  و  $10^x = y \Leftrightarrow x = \text{Log}(y)$

6. تذكير لمراحل تعريف الأس:

• القوة ذات الأس الصحيح الطبيعي:  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$  و  $a^1 = a$  و  $a^0 = 1$ .

• القوة ذات الأس الصحيح النسبي:  $\forall p > 0, a^p = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_p$  و  $\forall p < 0, a^p = \frac{1}{a^{-p}}$ , ( $a \neq 0$ ) و  $a^1 = a$  و  $a^0 = 1$ .

• القوة ذات الأس الجذري:  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  (مع  $p \in \mathbb{Z}$  و  $q \in \mathbb{N}^*$ ) ( $a > 0$ )  $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ,  $\forall r \in \mathbb{Q}$ .

• القوة ذات الأس عدد حقيقي:  $\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln a}$ , ( $a > 0$ )



ليكن  $a$  من  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  و الدالة  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

(1) معرفة و متصلة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

$$(2) [f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times e^{x \ln a} = (\ln(a)) \times a^x$$

(3) ومنه إشارة:  $[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times a^x$  هي إشارة  $\ln a$ :

• إذا كان:  $0 < a < 1$  فإن:  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  تناقصية:

$$\cdot \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$

• إذا كان:  $a > 1$  فإن:  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  تزايدية:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$$

لكل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$ :

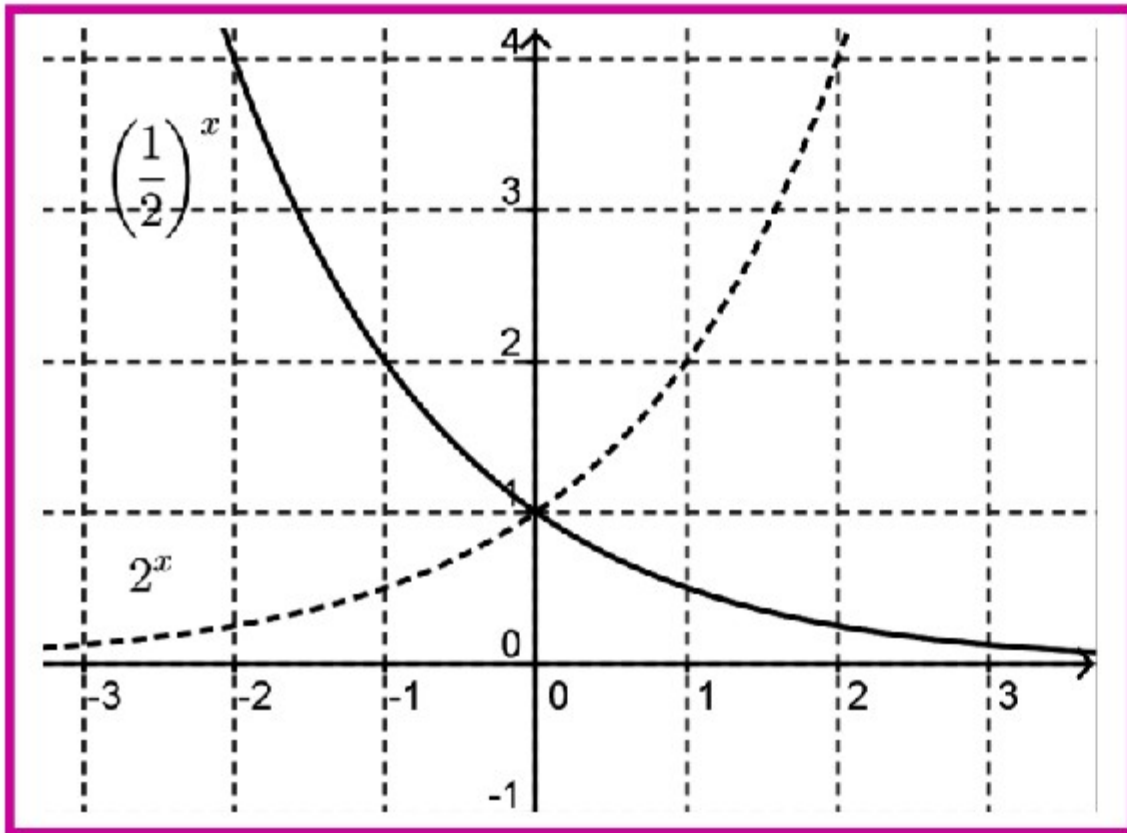
$$\bullet a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\bullet a^x \times a^y = a^{x+y} \text{ و } \frac{1}{a^x} = a^{-x} \text{ و } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \text{ و } (a^x)^y = a^{xy}$$

إنشاء منحنى الدالة:  $f$  في م.م.  $(0, i, j)$  مع

حالة 1:  $0 < a < 1$  نأخذ:  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

حالة 2:  $a > 1$  نأخذ:  $f(x) = 2^x$ .



(1) أكتب الدالة الآتية باستعمال الدالة الأسية النيبيرية:  $f(x) = 3^{x^3-x}$

(2) حدد مجموعة تعريف  $f$ .

(3) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(4) ثم أحسب الدالة المشتقة  $f'$  ل  $f$ .