

سلسلة 1	الدوال الأسية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية										
تمرين 1 :												
<p>لدينا : $x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{4x-3} = e^0 \Leftrightarrow e^{4x-3} = 1$ ، منه : $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$</p>												
<p>$e^{x-4} = 0$ منه : $S = \emptyset$ (لأن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x-4} > 0$)</p>												
<p>لدينا : $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3} = e^1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3} = e \Leftrightarrow 3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x = 0$</p>												
<p>لدينا : $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$</p>												
<p>منه : $\Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{3+5}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$: منه : $S = \{4; -1\}$</p>												
<p>$3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x (3e^{2x} - 2e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0$</p>												
<p>(لأن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$)</p>												
<p>نضع $e^x = t$ منه : $3t^2 - 2t - 1 = 0$: منه : $\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow t = \frac{2+4}{6} = 1$ ou $t = \frac{2-4}{6} = \frac{-1}{3}$</p>												
<p>منه : $e^x = 1$ ou $e^x = \frac{-1}{3} < 0$ أي $e^x = e^0$ ، بالتالي : $S = \{0\}$</p>												
<p>التساويتان $e^x = 0$ و $e^x = \frac{-1}{3}$ غير ممكنتان (لأن دالة الأس دائما موجبة قطعا) ، لذلك تم تجاوزهما.</p>												
<p>$2^x = 3^{1-2x} \Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln(3^{1-2x}) \Leftrightarrow x \ln(2) = (1-2x) \ln(3)$</p>												
<p>$\Leftrightarrow x \ln(2) = \ln(3) - 2 \ln(3) x \Leftrightarrow (\ln(2) + 2 \ln(3)) x = \ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{\ln(2) + 2 \ln(3)}$</p>												
<p>بالتالي : $S = \left\{ \frac{\ln(3)}{\ln(2) + 2 \ln(3)} \right\}$</p>												
<p>قد يبدو السؤال لا علاقة له بدالة الأس، لكن الأمر غير ذلك ، فالكتابة 2^x و 3^{1-2x} هي مكتوبة لدوال أسية ذات الأسس 2 و 3 على التوالي وهذا يعني أن $2^x > 0$ و $3^{1-2x} > 0$ وهذا ما سمح باستعمال دالة اللوغاريتم النبيري في طرفي للتساوية</p>												
<p>$e^x - 2e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{2}{e^x} + 1 > 0$</p> <p>لدينا : $\frac{(e^x)^2 - 2 + e^x}{e^x} > 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 > 0$</p> <p>نضع $e^x = t$ فنجد : $t^2 + t - 2 < 0$</p> <p>$\Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow t = \frac{-1+3}{2} = 1$ ou $t = \frac{-1-3}{2} = -2$</p> <p>$e^x - 2e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 2) > 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (e^x - 1) > 0$</p> <p>$\Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$</p> <p>بالتالي : $S =]0, +\infty[$</p>	<p>لحل المتراجحة $2e^{2x} - 3e^x + 1 < 0$ نضع $e^x = t$</p> <p>فنجد : $2t^2 - 3t + 1 < 0$</p> <p>$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow t = \frac{3+1}{4} = 1$ ou $t = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$x^2 - 3$</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>+</td> <td></td> </tr> </table> <p>منه : $\frac{1}{2} < t < 1$ أي $t \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$</p> <p>أي : $\frac{1}{2} < e^x < 1$ أي : $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < x < \ln(1)$</p> <p>أي : $-\ln(2) < x < 0$</p> <p>بالتالي : $S =]-\ln(2), 0[$</p>	x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	$x^2 - 3$	+	-	+		2
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$								
$x^2 - 3$	+	-	+									
<p>في المتراجحة الثانية استعملنا طريقة التعميل لكننا سنحصل على عامل موجب $e^x + 2$ مما يسمح بربح الوقت.</p>												

تمرين 2 :

$$f(x) = e^{x+\ln(x)}$$

$$f'(x) = (e^{x+\ln(x)})' = (x+\ln(x))' e^{x+\ln(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x+\ln(x)}$$

$$f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = (e^{5x})' = (5x)' e^{5x} = 5 e^{5x}$$

$$f(x) = \ln(e^x + 1)$$

$$f'(x) = (\ln(e^x + 1))' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$f(x) = \ln(x) e^x$$

$$f'(x) = (\ln(x) e^x)' = (\ln(x))' e^x + \ln(x)(e^x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} e^x + \ln(x) e^x = \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right) e^x$$

$$f(x) = x^x$$

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{\ln(x^x)})' = (e^{x \ln(x)})' = (x \ln(x))' e^{x \ln(x)} = (x' \ln(x) + x(\ln(x))') e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1) e^{x \ln(x)}$$

لا يمكننا في هذا المثال الاشتقاق باستعمال القاعدة $(x^r)' = r x^{r-1}$ ، لكون الأس متغير وليس بعدد ثابت، لذلك وجب علينا تغيير صيغة الدالة لإيجاد الخاصية المناسبة للاشتقاق

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{|x|} e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{-t} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} \times \frac{1}{\sqrt{t}} = 0 \times 0 = 0$$

نضع $t = -x$ إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{|x|} e^x$

بصفة عامة عند حساب نهاية لدوال أسية عند $-\infty$ وعند الحصول على شكل غير معد يستحسن استعمال تغيير للتغير $t = -x$ ، وذلك لكونه يعول النهاية لـ $+\infty$ وهو ما يسمح باستغلال أهم النهايات الخاصة للدوال الأسية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

هذه النهاية الخاصة لم استعمال مقلوبها ، أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ حيث $n=1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0+x}{0+7} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{e^x + 7} = -\infty$$

مثال سهل، لكن الهدف منه أن نتعلم عدم تجاوز مرحلة التعويض قبل أية محاولة للتحميل أو ما شابه.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x}} = (1 \times 0) = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - e^x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^x = 1^0 = 1$$

لا يصبح التعويض بالطريقة،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x+1)} = e^{0 \times 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{\ln(t^t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t \ln(t)} = e^{2 \times 0} = 1$$

منه $\sqrt{x} = t$ ، نضع $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x} \ln(x)}$

$$v_n = \ln(u_n) \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases} \quad \text{تمرين 4}$$

لدينا : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n^3) = 3 \ln(u_n) = 3v_n$ ، إذن : v_n متتالية هندسية أساسها $q = 3$

$$v_n = v_0 q^n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n \quad \text{منه} \quad v_0 = \ln(u_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$u_n = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n} = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3^n} \quad \text{بالتالي} \quad \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n \quad \text{منه}$$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) 3^n = -\infty$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ و $-\ln(2) < 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-\ln(2) 3^n) = 0 \quad \text{منه}$$

تمرين 5 :

الدالة الأصلية	الدالة
$F(x) = \frac{1}{3} e^{3x+1}$	$f(x) = e^{3x+1}$
$f(x) = \frac{1}{e^x} + 1 = e^{-x} + 1 \Rightarrow F(x) = -e^{-x} + x = \frac{-1}{e^x} + x$	$f(x) = \frac{1+e^x}{e^x}$
$f(x) = \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)} \Rightarrow F(x) = \ln(e^x+1)$	$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
$f(x) = \frac{(e^x)'}{(e^x)^2+1} \Rightarrow F(x) = \text{Arctan}(e^x)$	$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$
$f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x + x$	$f(x) = (e^x+1)^2$
$f(x) = \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow F(x) = x - \ln(e^x+1)$	$f(x) = \frac{1}{e^x+1}$
$f(x) = (\sin x)' e^{\sin x} \Rightarrow F(x) = e^{\sin x}$	$f(x) = \cos x e^{\sin x}$
$f(x) = \sqrt{e^x} + \sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow F(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + 3e^{\frac{1}{3}x} = 2\sqrt{e^x} + 3\sqrt[3]{e^x}$	$f(x) = \sqrt{e^x} + \sqrt[3]{e^x}$
$f(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = 2 e^{\sqrt{x}}$	$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

لم يطلب منا تحديد جميع الدوال الأصلية، لذلك إضافة الثابتة ليس ضروريا

الدالة الأصلية للدالة e^{ax+b} هي $\frac{1}{a} e^{ax+b}$ حيث a و b عدلان حقيقيان ثابتان و $a \neq 0$

الدالة الأصلية للدالة $e^{u(x)}$ هي $(u(x))' e^{u(x)}$

الدالة الأصلية للدالة $\frac{(u(x))'}{u(x)}$ هي $\ln(u(x))$ ، الدالة الأصلية للدالة $\frac{(u(x))'}{u^2(x)+1}$ هي $\text{Arctan}(u(x))$