

التمرين الأول

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$f(0) = 0 \text{ و } f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} \quad x > 0$$

1) أ. بين أن f متصلة على يمين 0

ب. أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

2) لتكن g الدالة بحيث $g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$

$$\text{أ. أحسب } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) ; \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

ب. أدرس تغيرات الدالة g

ج. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

د. استنتج إشارة $g(x)$

$$3) \text{ أ. بين أن } \forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - \ln x)^2}$$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \approx 1,2$ و $f(\alpha) = 0,3$)

التمرين الثاني

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعيا و يخالف 1 .

1) نعتبر الدالة h_a المعرفة بما يلي : $h_a(x) = e^x - ax - a$

أدرس تغيرات الدالة h_a واستنتج إشارة $h_a(x)$ (ناقش)

(حسب قيم a)

2) لتكن f_a الدالة العددية لمعرفة بما يلي :

$$f_a(x) = \frac{xe^x}{e^x - a}$$

أ. حدد D_a مجموعة تعريف f_a وأحسب نهايات الدالة f_a

ب. بين أن المنحنيات (C_a) تقبل نفس المقارب المائل (Δ)

و أدرس الوضع النسبي ل (C_a) و (Δ)

ج. أدرس منحنى تغيرات الدالة f_a

د. حدد قيم a والتي تقبل من أجلها f_a مطرافين في

x_1, x_2 ثم بين أن النقطتين

$$M_1(x_1, f_a(x_1)) , M_2(x_2, f_a(x_2)) \text{ تنتميان إلى}$$

مستقيم ثابت يتم تحديد معادلة ديكارتية له

3) نفترض أن $a = 2$

أ. المعادلة $h_2(x) = 0$ تقبل حلين $\beta ; \alpha$. أعط تأطيرا

للحلين باستعمال القيم المقربة التالية $e^{\frac{7}{4}} \approx 5,75$,

$$e^{-1} \approx 0,37 \text{ و } e^{\frac{3}{4}} \approx 0,47 , e^2 \approx 4,48$$

ب. أرسم المنحنى (C_2)

التمرين الثالث

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) أ. بين أن f متصلة على يمين 0

ب. أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

ج. بين أن f تزايدية قطعيا على $[0, +\infty[$

$$2) \text{ أ. أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ب. بين أن $\forall t \geq 0 : 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$

ج. بين أن $\forall x > 0 : -\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

د. استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3) أرسم المنحنى (C_f)

(II) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم . نعتبر الدالة f_n

المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) بين أن f_n قابلية اشتقاق على يمين 0

2) أدرس تغيرات f_n على $[0, +\infty[$

3) أ. بين أن لكل n من \mathbb{N}^* , المعادلة $f_n(x) = \frac{2}{n}$ تقبل

حلا وحيدا a_n في المجال $]0, +\infty[$

ب. بين أن

$$(\forall x > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x) - \frac{2}{x+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

ج. استنتج أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية ثم بين أنها

متقاربة . نضع $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

د. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) na_n = 2e^{a_n} - 2$

ثم أثبت أن $a = 0$

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}} \quad x \neq 0 ; x \neq 1$$

$$\text{و } f(1) = 0 ; f(0) = 1$$

1) أ. بين أن f متصلة على يمين 0 وعلى يسار 1

ب. هل f متصلة في النقطة 1

2) أ. أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 وعلى يسار 1

ب. أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

3) أ. أحسب المشتقة $f'(x)$

ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) مثل مبيانيا منحنى الدالة f

5) لتكن g قصر الدالة f على المجال $[1, +\infty[$ $I =]$

أ. بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب. عرف دالتها العكسية g^{-1}

6) حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$