التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1) أ- أدرس زوجية الدالة f

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و اوعط تاويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=\dfrac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة f و انجز جدول تغيراتها

ج- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 0<f(x)\le\dfrac{1}{2}$

3) أرسم المنحنى (C_f)

4) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في المجال $I=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ حلا وحيدا α

5) بين أن $(\forall x\in I)\quad |f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

6) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=0$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le U_n\le\dfrac{1}{2}$

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني

الجزء (1)

1) حل المعادلة $2e^{-2x}-2e^{-x}-1=0$ و استنتج أشارة $2e^{-2x}-2e^{-x}-1$

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=2e^{-x}-e^{-2x}-x$

أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

3) أدرس منى تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين β , α

5) أرسم المنحنى (C_f) (نعطي $\alpha\simeq-0,8$ و $\beta\simeq 0,7$)

الجزء (2)

لتكن g الدالة المعرفة على المجال $I=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ بما يلي : $g(x)=2e^{-x}-e^{-2x}$

1) أدرس منحى تغيرات الدالة g و بين أن $g(I)\subset I$

2) بين أن $(\forall x\in I)\ |g'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

3) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_{n+1}=g(U_n)$ و $U_0=\dfrac{1}{2}$

أ) بين أن $\frac{1}{2} \le U_n \le 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن $|U_{n+1} - \beta| \le \frac{1}{2}|U_n - \beta| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة حدد نهايتها

التمرين الثالث

ليكن n عددا طبيعي . نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x) = -1 + n(2-x)e^x$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$

2) أحسب المشتقة $f_n'(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0 \quad (E_n)$ تقبل حلين مختلفين $\alpha_n < 0$ و $\beta_n \in]1,2[$

4) أ- بين ان $\left(t \text{ حل للمعادلة } (E_n) \right) \Leftrightarrow \left(f_{n+1}(t) = (2-t)e^t \right)$

ب- بين أن $f_{n+1}(\beta_n) > 0$ و استنتج أن المتتالية $(\beta_n)_n$ تزايدية

ج- بين أن المتتالية $(\beta_n)_n$ متقاربة و أن $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 2$ و بين ان $\lim_{n\to+\infty} n(\ln 2 - \ln \beta_n) = \frac{1}{2}e^{-2}$

5) أ- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_n$ تناقصية

ب- بين أن $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = -\infty$ و بين ان $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n} = -1$

التمرين الرابع

الجزء (1)

1) نضع $g(x) = e^x + x + 1$

أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

ب- استنتج إشارة $g(x)$

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

أ- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$

ج- تحقق أن $f(\alpha) = 1 + \alpha$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

د- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,cm$ (نأخذ $\alpha \simeq -1{,}25$)

الجزء (2)

ليكن n عدد طبيعي .

1) أ- بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n

ب- أدرس رتابة المتتالية $(\alpha_n)_n$

ج- بين أن $\alpha_n \ge n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

2) أ- بين أن $\alpha_n - n = ne^{-\alpha_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n - n$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

ب- بين أن $\lim_{n\to+\infty} \ln \alpha_n - n = -\infty$ و بين أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \alpha_n}{\ln n} = 1$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

2) أ- بين أن $(\forall t>0)\quad \ln(1+t)>\dfrac{t}{1+t}$

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$ و استنتج أن f تناقصية ثم ضع جدول تغيراتها

3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y=x$ (Δ) في نقطة وحيدة أفصولها α ينتمي إلى المجال $]0,\ln 2[$

4) أرسم المنحنى (C_f)

5) نضع $I=]0,\ln 2[$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي $U_0=\dfrac{1}{2}$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall x\in I)\quad |f'(x)|\leq\dfrac{2}{3}$

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n\in I$

ج- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$ استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين السادس

ليكن n عدد طبيعي بحيث $n\geq 2$. نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=1-x-e^{-nx}$

1) بين أن $\ln x<x-1$ $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)$ و استنتج أن $e^{x-1}>x$ $(\forall x>1)$

2) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة f_n و ضع جدول تغيراتها

ج- بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل في $\left]0,+\infty\right[$ حلا وحيدا نرمز له a_n و أن $a_n<1$

3) أ- أدرس رتابة الدالة $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

ب- بين أن $(a_n)_{n\geq 3}$ متتالية تزايدية و استنتج أنها متقاربة

4) بين أن $f_n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)<0$ $(\forall n\geq 2)$ و استنتج نهاية المتتالية $(a_n)_n$

التمرين السابع

ليكن n عدد طبيعي غير منعدم . نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x)=e^x+\dfrac{x}{n}$

1) أ- أحسب نهايتي الدالة f_n

ب- أدرس تغيرات الدالة f_n و ضع جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a_n و أن $a_n\in\left]-\infty,0\right[$

3) أ- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية

ب- بين أن $f_n\left(-\ln\sqrt{n}\right)>0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$

ج- حدد إشارة $f_n(-\ln(n))$. و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}$

د- تحقق أن $\dfrac{a_n}{\ln n}=-1+\dfrac{\ln(-a_n)}{\ln n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}=-1$