الدوال الأسية

تمرين رقم 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln\left(e^{x}-e^{-x}\right)$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب المائل

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

3) ليكن n عدد من $\mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $f(x)=n$ (E_n)

أ- بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n

ب- أدرس رتابة المتتالية $(x_n)_n$

ج- قارن x_n و n ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n-n$

4) أ- بين أن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده و عرف الدالة العكسية f^{-1}

ب- حل المعادلة $e^{2x}-e^{x+y}-1=0$ حيث x هو المجهول

ج- استنتج أن $x_n=\ln\left(\frac{1}{2}e^{n}+\frac{1}{2}\sqrt{e^{2n}+n}\right)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ و حدد مرة ثانية $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n-n$

تمرين رقم 2

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة عبى $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x-e^{-x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f و استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و أن $\alpha\in\left]\frac{1}{2},1\right[$

3) استنتج إشارة $f(x)$

II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{x+1}{e^{x}+1}$

1) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})$ $g'(x)=\dfrac{-e^{x}f(x)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g

3) بين أن المعادلة $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$

4) ارسم المنحنى (C_g) (نأخذ $\alpha\simeq 0,57$)

III) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=0$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

1) بين أن $0\le U_n\le\alpha$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية و استنتج أنها متقاربة

3) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

تمرين رقم 3

ليكن k عددا حقيقيا بحيث $0 < k < e$

(A) نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_k(x) = (2-x)e^x - k$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$

2) أحسب المشتقة $f_k'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_k . أحسب $f_k(1)$

3) أـ بين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين β_k ; α_k و أن $\alpha_k < 1 < \beta_k$

بـ بين أن $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$ حدد العلاقة التي تحققها β_k

4) حدد إشارة $f_k(x)$

(B) نعتبر الدالة g_k المعرفة كما يلي : $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$ و (C_k) منحنى الدالة g_k

1) أـ أدرس منحنى تغيرات الدالة $u(x) = e^x - kx$

بـ استنتج أن $e^x - kx > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ (نذكر $0 < k < e$)

2) أـ أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x)$

بـ بين أن $g_k'(x) = \dfrac{kf_k(x)}{(e^x - kx)^2}$

جـ أحسب $g_k(1)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة g_k

3) لتكن M_k و N_k نقطتي المنحنى (C_k) و التين أفصولهما α_k و β_k على التوالي

أـ بين أن $g(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$ و حدد $g_k(\beta_k)$

بـ بين مما سبق أن M_k و N_k تنتميان لمنحنى ثابت يتم تحديد معادلة له

جـ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) ; (C_2)

4) أـ بين أن $\alpha_2 = 0$

بـ أرسم المنحنيين (C_1) ; (C_2) في نفس المعلم (نأخذ $\beta_2 = 1,6$; $\beta_1 = 1,8$; $\alpha_1 = -1,1$)

تمرين رقم 4

الجزء (1) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $x \neq 0$; $g(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ و $g(0) = 1$

1) بين أن g متصلة في النقطة $x_0 = 0$

2) نضع $h(t) = 1 + \dfrac{t^2}{2} - t - e^{-t}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

أـ بين أن $0 \le h''(t) \le t$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

بـ استنتج أن : $x - \dfrac{x^2}{2} \le 1 - e^{-x} \le x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

3) بين أن g قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$

4) أدرس منحى تغيرات الدالة g

الجزء (2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $x > 0$; $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}(1-e^{-x})$ و $f(0) = 1$

1) أـ أدرس اتصال الدالة f على يمين $x_0 = 0$

بـ بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ و أن $f_d'(0) = -\dfrac{3}{2}$ (لاحظ أن $f(x) = 2g(2x) - g(x)$)

2) أ- بين أن $f'(x) = \dfrac{2x+1-(x+1)e^{x}}{x^{2}e^{2x}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$

ب- بين أن $e^{x} \geq x+1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{+})$ و استنتج أن f تناقصية على $\mathbb{R}^{+}$ ثم أنجز جدول التغيرات

3) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (3) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي : $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} f(t)\,dt$

1) بين أن $xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$ وأحسب $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$

2) بين أن F قابلة للاشتقاق في 0 و أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة F في النقطة ذات الأفصول 0

3) أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+}$ أحسب $F'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^{+}$

ب- أدرس رتابة الدالة F

تمرين رقم 5

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 2$. نضع $g_n(x) = n(1-e^{-x}) - x$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f_n(x) = \dfrac{x^{n}}{e^{x}-1} \quad ; \quad x \neq 0$ و $f_n(0) = 0$

(I) 1) أحسب النهايتين $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n(x) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g_n(x)$

2) أحسب المشتقة $g_n'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g_n

3) أ- بين أن $x-1 \geq \ln x \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$ و استنتج اشارة $g_n(\ln n)$

ب- بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما $a = 0$ و الثاني β_n موجب قطعا . أحسب $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n$

ج- استنتج إشارة $g_n(x)$

(II) 1) أ- أحسب النهاية $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ (ناقش حسب زوجية العدد n)

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $-\infty$

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n في النقطة $x_0 = 0$

3) أ- بين أن $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}e^{x}g_n(x)}{(e^{x}-1)^{2}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{*})$

ب- أنجز جدول تغيرات كل من الدالتين $f_2 \quad ; \quad f_3$

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_2) \quad ; \quad (C_3)$

5) أرسم المنحنيين $(C_2) \quad ; \quad (C_3)$ (نأخذ $\beta_2 \simeq 1,52 \quad ; \quad f_2(\beta_2) \simeq 0,65$ و $\beta_3 \simeq 2,82 \quad ; \quad f_3(\beta_3) \simeq 1,42$)

(III) لتكن F_n قصور الدالة f_n على المجال $I = [0,1]$

1) بين أن F_n تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

2) بين أن المعادلة $F_n(x) = \dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز U_n

3) تحقق أن $F_{n+1}(U_n) = \dfrac{1}{2}U_n$ و استنتج ان المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

4) أ- بين أن $U_2 > \dfrac{1}{2}$ و بين أن $2U_n^{n} \geq \dfrac{1}{2}$ (نأخذ $\sqrt{e} \geq \dfrac{3}{2}$)

ب- بين أن $-\dfrac{2\ln 2}{n} \leq \ln U_n$ و أحسب $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln U_n)$ و استنتج نهاية المتتالية $(U_n)_n$