

التمرين رقم 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) أ- بين أن $\left(\forall x \in D_f - \{0\}\right), \frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{2(e^{-2x} - 1)}{-2x}}$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

(3) أدرس تغيرات الدالة f

(4) أرسم المنحنى (C_f)

(5) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} محددًا مجموعة تعريفها J و أحسب $f^{-1}(x)$

ب- أرسم في نفس المعلم منحنى الدالة العكسية

(6) نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي : $U_1 = 1$ و $U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{e^{2n}}}$ $n \in \mathbb{N}^*$

و نضع $(\forall n \geq 2) V_n = U_n^2 - U_{n-1}^2$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددًا أساسها

ب- أحسب بدلالة n الجمع $S_n = V_2 + V_3 + \dots + V_n$

ج- استنتج أن $U_n = \frac{f(n)}{f(1)}$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين رقم 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln\left(e^x - e^{\frac{1}{x}}\right)$; $x \neq 0$ و $f(0) = 0$

(1) بين أن مجموعة تعريف f هي $D =]-1, 0] \cup]1, +\infty[$

(2) أ- بين أن f متصلة على يسار 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 0

(3) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

(4) أ- تحقق أن $(\forall x > 1) f(x) = x + \ln\left(1 - e^{\frac{1}{x}-x}\right)$.

ب- استنتج أن المستقيم $y = x$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f)

(5) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

(6) أ- بين المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصل في نقطة إفتولها α ينتمي إلى المجال $]1, 2[$

ب- أرسم المنحنى (C_f) (تأخذ $\alpha \approx 1,2$)

التمرين رقم 3

ليكن n عدداً طبيعياً بحيث $n \geq 3$. نعتبر الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_n(x) = e^{-nx} - x$

(1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

(2) أحسب المشتقة $f'_n(x)$ و أنجز جدول التغيرات

(3) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n و بين أن α_n ينتمي للمجال $]0, 1[$

4) أ- أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ تناقصية

ج- استنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ متقاربة و بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

التمرين رقم 4

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -\frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}}$

1. أ حسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ يمكنك وضع $t = \frac{1}{x}$

3. ادرس تغيرات الدالة g ثم ضع جدول تغيراتها

4. حدد إشارة $g(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x + xe^{\frac{1}{x}}$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أ حسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ يمكنك وضع $t = \frac{1}{x}$. ماذا تستنتج ؟

3. ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

4. أ- بين أن : $f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{x}$ ($\forall x > 0$) .

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

5. أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين رقم 5

الجزء (1) لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \ln|x+1|$

5) أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f و أ حسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- ادرس الفرعين اللانهائين للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

2) أ حسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

3) أ حسب المشتقة $f'(x)$ و ادرس تغيرات الدالة f

4) أ- ادرس تقعر المنحنى (C_f)

ب- أرسم المنحنى (C_f) (لاحظ أن $f(-2) = 0$)

5) استنتج إشارة $f(x)$

الجزء (2) : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $\begin{cases} g(x) = e^{(x+2)\ln|x+1|} , & x \neq -1 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$

5) أ- بين أن g متصلة في النقطة $x_0 = -1$

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة g في $x_0 = -1$

5) أ- أ حسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

- ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (Γ_g) عند $-\infty$ و $+\infty$
- (3) أ حسب $g'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة g ثم أعط جدول تغيرات الدالة g
- (4) أرسم المنحنى (Γ_g)
- (5) ناقش حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة $|x+1|=m^{\frac{1}{x+2}}$

التمرين رقم 6

ليكن n عدداً من \mathbb{N}^* و $a_1; a_2; \dots; a_n$ أعداد حقيقية موجبة قطعاً .

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{و} \quad A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$(1) \quad \text{بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x \geq x+1$$

$$(2) \quad \text{بين أن } (\forall k \in \{1; 2; \dots; n\}) \quad e^{\frac{a_k-1}{A_n}} \geq \frac{a_k}{A_n} \quad \text{و استنتج أن } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

التمرين رقم 7

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

$$(1) \quad \text{أ حسب } f'(x) \quad \text{و أدرس منحنى تغيرات الدالة } f \quad \text{على المجال } [0, +\infty[$$

$$(2) \quad \text{أ - بين أن } f([0,1]) \subseteq [0,1]$$

$$\text{ب- } (\forall x \in [0,1]) \quad \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{ج- بين أن المعادلة } f(x) = x \quad \text{تقبل في المجال } [0,1] \quad \text{حلاً وحيداً } \alpha$$

$$(3) \quad \text{أ - بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq 1$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$$

$$\text{ج- بين أن المتتالية } (U_n)_n \quad \text{متقاربة و حدد نهايتها}$$

التمرين رقم 8

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = (2-x)e^x - 2$

$$(1) \quad \text{أ حسب النهاية } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$(2) \quad \text{أ - أ حسب المشتقة } g'(x) \quad \text{و أنجز جدول تغيرات الدالة } g$$

$$\text{ب- بين أن المعادلة } g(x) = 0 \quad \text{تقبل في المجال }]0, +\infty[\quad \text{حلاً وحيداً } \alpha \quad \text{و أن } 1 < \alpha < 2$$

$$\text{ج- استنتج أن } g(x) \geq 0 \quad \text{على المجال }]0, \alpha] \quad \text{و أن } g(x) \leq 0 \quad \text{على المجال } [\alpha, +\infty[$$

الجزء (2) لتكن f الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{e^x - 1}}$ و $f(0) = 0$

$$\text{أ - بين أن } f \quad \text{متصلة على يمين } x_0 = 0$$

$$\text{ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة } f \quad \text{على يمين } x_0 = 0$$

$$(2) \quad \text{أ حسب النهاية } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة}$$

$$(3) \quad \text{أ - بين أن } f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{(e^x - 1)^3}}$$

$$\text{ب- بين أن } f(\alpha) = \sqrt{\frac{2\alpha}{e^\alpha}} \quad \text{و أنجز جدول تغيرات الدالة } f$$

(4) تحقق أن $f(x) - x = \frac{(e^x - 2)}{\sqrt{e^x - 1} + 1} f(x)$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (Δ)

(5) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \approx 1,59$ و $f(\alpha) = 0,8$)

الجزء (3) لتكن h قصور الدالة f على المجال $[\alpha, +\infty[$

(1) بين أن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجال يتم تحديده

(2) ليكن n عدد طبيعي بحيث $n \geq 2$.

أ- بين أن المعادلة $h(x) = \frac{1}{n}$ تقبل في $[\alpha, +\infty[$ حلا وحيدا β_n

ب- أدرس رتبة المتتالية $(\beta_n)_{n \geq 2}$

ج- بين أن $\beta_n \geq \ln(n+1)$ ($\forall n \geq 2$) ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$

التمرين رقم 9

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $f(x) = 2xe^x$

(1) أ- بين أن f تقابل من المجال $[0,1]$ نحو مجال J يتم تحديده

ب- لتكن f^{-1} تقابله العكسي . أعط جدول تغيرات الدالة f^{-1}

(2) بين أنه يوجد عدد وحيد α في المجال $]0,1[$ بحيث $\alpha e^\alpha = 1$

(3) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث : $U_0 = \alpha$ و $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

أ- بين أن بين أن $0 < U_n \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- بين أن $f(x) \geq x$ ($\forall x \in [0,1]$) و استنتج رتبة المتتالية $(U_n)_n$

ج- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

(4) لكل عدد صحيح طبيعي n نضع $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

أ- بين أن $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n e^{-U_{n+1}}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- استنتج أن $U_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ج- بين أن $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) و استنتج أن $(S_n)_n$ متقاربة أن نهايتها L تحقق $\alpha \leq L \leq 2$

التمرين رقم 10

ليكن n عددا طبيعيا من \mathbb{N}^* و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x + 1 - 2ne^{-nx}$

(1) أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$

(2) أحسب المشتقة و ضع جدول تغيرات الدالة f_n

(3) أ- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,1[$ حلا وحيدا u_n

ب- بين أن $\frac{\ln n}{n} \leq u_n \leq \frac{\ln 2n}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$