| ثانوية الجولان التأهيلية | السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية | السنة الدراسية : 2011 – 2010 | سلسلة التمارين رقم :05 |
|---|---|---|---|

# الدوال الأسية

## التمرين رقم : 01

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^{x\ln(\ln x)} & , \quad x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1 – حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$ ثم أحسب النهايات عند محدات $D_f$

2 – أدرس اتصال الدالة $f$ في النقطة 0

3 – a – نضع: $h = x+1$

بين أن: $$\frac{f(x)}{x-1} = e^{\ln\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right) + \frac{h}{\ln(1+h)}\left[\ln(1+h)\ln\left(\ln(1+h)\right)\right]}$$

b – استنتج $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)}{x-1}$ و أول النتيجة مبيانيا

4 – نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي:

$$g(x) = 1+\ln x.\ln(\ln x)$$

a – أدرس تغيرات الدالة g و استنتج إشارتها

b – بين أن لكل x من $D_f - \{1\}$ :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\ln x}f(x)$$

c – استنتج جدولا لتغيرات الدالة $f$

5 – a – بين أن:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x\ln(\ln x) - \ln x \qquad (\forall x \in D_f)$$

b – أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln(\ln x) - \ln x)$

c – استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا

6 – أنشئ $(C_f)$ المنحنى الممثل لدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

## التمرين رقم : 02

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة العددية $f_n$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$$

و $(C_n)$ منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1– a – أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

b – أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(C_n)$

2 – أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ و ضع جدول تغيرات الدالة $f$

3 – a – بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$

b – بين أن: $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \rangle\ 0$

c – بين أن: $e^x \geq x+1 \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$

و استنتج أن : $f_n(1) \rangle\ 0$

d – بين أن: $\frac{1}{n} \langle\ \alpha_n \langle\ 1$

4 – أنشئ المنحنى $(C_2)$ ( نأخذ $\alpha_2 \approx 0,6$ )

5 – a – بين أن:

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

b – استنتج أن: $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0 \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$

c – بين أن المتتالية $(\alpha_n)$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة

6 – a – باستعمال نتيجة السؤال 3 – d ) بين أن :

$$\frac{1}{n^2} \langle\ e^{-n\alpha_n} \langle\ \frac{1}{n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$$

b – استنتج أن: $\frac{\ln n}{n} \langle\ \alpha_n \langle\ \frac{2\ln n}{n}$

c – حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

## التمرين : 03

### الجزء الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$$

1 – أحسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

2 – أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ و ضع جدولا لتغيرات الدالة g

3 – استنتج إشارة الدالة g على المجال $]0,+\infty[$

### الجزء لثاني:

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} & , \quad x\rangle 0 \\ f(x)=1+\ln\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right) & , \quad x\langle 0 \\ f(0)=1 & \end{cases}$$

و ليكن $(C_f)$ منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – a – حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$

b – أحسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

2 – a – بين أن $f$ متصلة في النقطة 0

b – أدرس اشتقاق الدالة $f$ على يمين وعلى يسار النقطة 0 ثم أول النتيجتين هندسيا

3 – a – بين أن لكل x من $]-\infty,0[$ :

$$\frac{f(x)}{x}=\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)\ln\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)\frac{1}{\left(\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)}+\frac{1}{x}$$

b – استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$

4 – a – بين أن:

$$\begin{cases} f'(x)=g(x).f(x) & , \quad x\rangle 0 \\ f'(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)} & , \quad x\langle 0 \end{cases}$$

b – استنتج جدولا لتغيرات الدالة $f$

5 – a – أنشئ المنحنى $(C_f)$

b – حدد مبانيا حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة:

$$x=\frac{1}{\ln\left(e-e^{m}\right)-1}$$

### الجزء الثالث:

1 – بين أن: $1\leq f(x)\langle e \qquad (\forall x\in[0,+\infty[)$

2 – لتكن $(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\left(1+\frac{1}{U_n}\right)^{U_n} & , \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

a – بين أن: $1\leq U_n\langle e \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$

b – بين أن $(U_n)$ متتالية تزايدية واستنتج أنها متقاربة

## الجزء الأول :

التمرين رقم : 04

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة العددية $g_n$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g_n(x) = x + e^{-nx}$$

و $(C_n)$ منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – a – أدرس تغيرات الدالة $g_n$

b – بين أن $g_n$ تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي $U_n$ يتم تحديده بدلالة n

2 – a – أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x)$

b – أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(C_n)$

3 – a – أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$

b – أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$ ( نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ و $\ln 2 \simeq 0,7$ )

4 – نضع : $V_n = g_n(U_n)$

بين أن المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ متقاربتين و حدد نهايتيهما

## الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية $f_n$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f_n(x) = x + e^{nx}$$

و $(E_n)$ منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

1 – أدرس تغيرات الدالة $f_n$

2 – استنتج أن المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $a_n$

3 – a – بين أن: $-\ln 2 \langle a_1 \langle -\frac{1}{2}$

b – بين أن: $x - a_1$ و $e^x + a_1$ لهما نفس الإشارة

4 – a – لتكن φ الدالة المعرفة على المجال $K = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ بما يلي: $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

بين أن φ تناقصية على K

b – استنتج أن:

$$(\forall x \in K) \qquad \left| e^x + a_1 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \left| x - a_1 \right|$$

5 – نعتبر المتتالية العددية $(b_n)$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{2} \\ b_{n+1} = -e^{b_n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a – بين أنه يوجد عدد حقيقي α بحيث :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad \left| b_{n+1} - a_1 \right| \leq \alpha \left| b_n - a_1 \right|$$

b – بين أن المتتالية $(b_n)$ متقاربة و حدد نهايتها

---

التمرين رقم : 05

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = f_1(x) = -1 + e^{\frac{x-1}{x^2}} \quad , \quad x \in ]-\infty, 1] \\ f(x) = f_2(x) = e^{x \ln \frac{x-1}{x^2}} \quad , \quad x \in ]1, +\infty] \end{cases}$$

-1 حدد $Df$ حيز تعريف الدالة $f$ و أدرس اتصال $f$ في النقطتين 0 و 1

-2 ادرس اشتقاق $f$ في النقطتين 0 و 1

-3 a) ادرس تغيرات الدالة g المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \ln \frac{x-1}{x^2} + \left( \frac{2-x}{x-1} \right)$$

b) استنتج أن g تنعدم في نقطة $\alpha$ من المجال $\left]\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right[$

c) حدد إشارة $g(x)$

-4 نأخذ $\alpha \simeq 1,4$ و $\frac{4}{3} \simeq 1,3$ بين أن

$$f(\alpha) \simeq e^{-2} \simeq 0,13$$

-5 ادرس تغيرات الدالة $f$

-6 أنشئ $Cf$ المنحني الممثل لدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم

( نأخذ $\ln 2 \simeq 0,7$ و $\ln 3 \simeq 1,1$ و $e = 2,7$ )

## التمرين رقم: 06

لتكن $f$ دالة تحقق الشرطين التاليين :

I) $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)\quad f(x+y)+x+y=(f(x)+x)(f(y)+y)$

II) $f(1)=e-1$

1 – a – بين أن : $(\forall t\in\mathbb{R})\quad f(t)+t\geq 0$

b – بين أنه إذا وجد عدد حقيقي $x_0$ بحيث: $f(x_0)=-x_0$

فإن: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=-x$

c – بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)\neq -x$

d – أحسب $f(0)$

2 – a – بين أن:النتيجة $(E)$ التالية::

$$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\quad f(nx)=(f(x)+x)^n-nx$$

b – أحسب $f(-x)-x$ و بين أن النتيجة $(E)$ تبقى صحيحة إذا كان $n\in\mathbb{Z}$

3 – a – أحسب $f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$ بدلالة العدد e و العدد n الصحيح

b – بين أن : $(\forall x\in\mathbb{Q})\quad f(x)=e^x-x$

4 – a – تأكد أن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$g(x)=e^x-x$ تحقق الشرط I )

b – أدرس ومثل مبيانيا الدالة g

c – استنتج أن: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 1+x\leq e^x$

5 – ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و $a\in\mathbb{R}_+^*$

نضع : $P_n(a)=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)$

a – بين أن لكل $a\in\mathbb{R}_+^*$ المتتالية $(P_n(a))_{n\geq 1}$ تزايدية

b – بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0 < P_n(a) < e^{a\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)}$

c – من أجل $0 < a < 1$ بين أنه توجد أعداد M مرتبطة بالعدد a بحيث : $P_n(a) < M \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

حدد بدلالة a قيمة ممكنة ل M

.........................................................................................

## التمرين رقم: 07

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{2}{1-x}} & , \quad x\neq 1 \\ f(1)=0 & \end{cases}$$

و $(C_f)$ منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – a – أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b – أدرس اتصال الدالة $f$ في النقطة 0

c – أدرس اشتقاق الدالة $f$ في النقطة 0 ثم أول النتيجة هندسيا

2 – a – بين أن:

$$f'(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}e^{\frac{2}{1-x}}\qquad (\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})$$

b – ضع جدولا لتغيرات الدالة $f$

3 – a – بين أن:

$$f(x)-x=\frac{e^{\frac{1}{1-x}}-1}{\frac{1}{1-x}}\left(e^{\frac{1}{1-x}}+1\right)\frac{x}{1-x}\qquad (\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})$$

b – حدد الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$

4 – ليكن g قصور الدالة $f$ على المجال $I=[0,1[$

بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده

5 – أنشئ المنحنيين $(C_f)$ و $(C_{g^{-1}})$

6 – لتكن $(U_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0=2 & \\ U_n\in\,]0,1[ & , \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*) \\ \ln(U_{n+1})=\ln(U_n)-\dfrac{2}{1-U_{n+1}} & , \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

a – بين أن: $U_{n+1}=g^{-1}(U_n)\quad (\forall n\in\mathbb{N})$

b – بين أن $(U_n)$ تناقصية

c – استنتج أن $(U_n)$ متقاربة وحدد نهايتها