| السنة 2 بكالوريا علوم رياضية | الحسابيات<br>حلول مقترحة | سلسلة 2 |
|---|---|---|

**تمرين 1** : $a$ و $b$ و $c$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)

**1**

نضع: $d = a \wedge b$ منه : $\exists(\sim ,\ \ ) \in IN^2 \ / \begin{cases} a = d\sim \\ b = d \\ \sim \wedge \ \ = 1 \end{cases}$

و حيث أن : $(a \wedge b).(a \vee b) = ab$ فإن : $d.(a \vee b) = d^2 \sim$ منه: $a \vee b = d \sim$ ، الآن ، لدينا :

$$(a \wedge b) + (a \vee b) = a + b \iff d + d\sim \ \ = d\sim + d \iff 1 + \sim \ \ = \sim + \iff 1 - \sim + \ \ (\sim - 1) = 0$$

$$(a \wedge b) + (a \vee b) = a + b \iff (\sim - 1)(\ \ - 1) = 0 \iff (\sim = 1)\ ou\ (\ \ = 1) \iff (a / b)\ ou\ (b / a)$$

**2**

▪ نفرض أن : $(a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1$ ، نضع : $a \wedge b = d$ منه:

$$\begin{cases} d / a \\ d / b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / ab \\ d / b^2 \\ d / a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / ab \\ d / a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow d / (a^2 + ab + b^2) \wedge (ab) \Rightarrow d / 1 \Rightarrow d = 1$$

▪ نفرض الآن أن : $a \wedge b = 1$ ، إذن : $a \wedge b^2 = 1$ و $a^2 \wedge b = 1$

نضع : $(a^2 + ab + b^2) \wedge a = d$ ، منه :

$$\begin{cases} d / a \\ d / a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / a \\ d / a(a + b) \\ d / a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / a \\ d / b^2 \end{cases} \Rightarrow d / a \wedge b^2 \Rightarrow d / 1 \Rightarrow d = 1$$

و بنفس الطريقة نبين أن : $(a^2 + ab + b^2) \wedge b = 1$

الآن : $\begin{cases} (a^2 + ab + b^2) \wedge a = 1 \\ (a^2 + ab + b^2) \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow (a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1$

خلاصة : $(a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1 \iff a \wedge b = 1$

للتذكير: $x \wedge y = 1 \iff x^n \wedge y^m = 1$ و $x \wedge yz = 1 \iff \begin{cases} x \wedge y = 1 \\ x \wedge z = 1 \end{cases}$

هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين (على الأقل أعرف طريقتين) ،لكننا فضلنا إدراج الطريقة التي يمكن تعميمها على أسئلة مشابهة.

**3**

▪ بداية نعلم أن : $(a \wedge c) / a$ و $(b \wedge c) / b$ منه : $(a \wedge c)(b \wedge c) / ab$ ، إذن : $c / ab \Rightarrow c / (a \wedge c)(b \wedge c)$

▪ من جهة أخرى ، نضع: $d = a \wedge c$ منه : $\exists(\sim , ª) \in IN^2 \ / \begin{cases} a = d\sim \\ c = d\,ª \\ \sim \wedge ª = 1 \end{cases}$

بين أن : $c / ab \Rightarrow d\,ª / d\sim b \Rightarrow \begin{cases} ª / \sim b \\ \sim \wedge ª = 1 \end{cases} \Rightarrow ª / b \Rightarrow ª\,d / bd \Rightarrow c / b(a \wedge c)$

مرة أخرى نضع : $¢ = b \wedge c$ منه : $\exists(p, q) \in IN^2 \ / \begin{cases} b = ¢\,p \\ c = ¢\,q \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$ منه :

$$c / b(a \wedge c) \Rightarrow ¢\,q / ¢\,p\,(a \wedge c) \Rightarrow \begin{cases} q / p\,(a \wedge c) \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Rightarrow q / (a \wedge c) \Rightarrow ¢\,q / ¢\,(a \wedge c) \Rightarrow c / (b \wedge c)(a \wedge c)$$

4

نفرض أن : $a \wedge b = 1$ ، إذن : $a^2 \wedge b^2 = 1$ ، لدينا إذن:

$$(a^2-b^2)\wedge(a^3-b^3)=(a-b)(a+b)\wedge(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left((a+b)\wedge(a^2+ab+b^2)\right)$$

نضع : $(a+b)\wedge(a^2+ab+b^2)=d$ ، إذن :

$$\begin{cases} d/a+b \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2+ab \\ d/ab+b^2 \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2 \\ d/b^2 \end{cases} \Rightarrow d/a^2\wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

بالتالي: $(a^2-b^2)\wedge(a^3-b^3)=a-b$

**تمرين 2** : $n$ عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1

لدينا : $A=ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^3b-ab^3)(a^2+b^2)$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^3\equiv a[3] \\ b^3\equiv b[3] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} ba^3\equiv ab[3] \\ ab^3\equiv ab[3] \end{cases}$ منه : $ba^3-ab^3\equiv 0[3]$ منه : $A\equiv 0[3]$

لدينا من جهة أخرى : $A=ab(a^4-b^4)=a^5b-ab^5$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^5\equiv a[5] \\ b^5\equiv b[5] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} ba^5\equiv ab[5] \\ ab^5\equiv ab[5] \end{cases}$ منه : $ba^5-ab^5\equiv 0[5]$ منه : $A\equiv 0[5]$

إذن : $3/A$ و $5/A$ ، و بما أن : $3\wedge 5=1$ فإن : $15/A$ ، بالتالي : $15/\ ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

2

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n^7\equiv n[7]$

و $n^3\equiv n[3]$ منه: $n^6\equiv n^2[3]$ منه : $\begin{cases} n^7\equiv n^3[3] \\ n^3\equiv n[3] \end{cases}$ منه : $n^7\equiv n[3]$

و $n^2\equiv n[2]$ منه: $n^6\equiv n^3[2]$ منه : $n^7\equiv n^4\equiv n^2\equiv n[2]$

بما أن 2 و 3 و 7 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $42/n^7-n \quad \forall n\in IN$

بالنسبة للعدد 2 يمكن دراسة حالات الزوجية فقط دون الحاجة لمبرهنة فيرما.

3

لدينا :

$$4^n+6n+8=4^n-1+6n+9=3(4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1)+6n+9=3(4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1+2n+3)$$

الآن لدينا : $\begin{matrix} 1 \equiv 1[3] \\ 4 \equiv 1[3] \\ 4^2 \equiv 1[3] \\ .... \equiv ..[3] \\ 4^{n-1} \equiv 1[3] \\ 4^n \equiv 1[3] \end{matrix}$ منه : $4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1\equiv n[3]$ منه :

$4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1+2n+3\equiv 3n+3\equiv 0[3]$ ، إذن : $4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1+2n+3\equiv 3k/k\in IN$

منه : $4^n+6n+8=9k$ ، بالتالي : بين أن : $9/4^n+6n+8$

4

لدينا : $6^n-1-5n=5(6^{n-1}+6^{n-2}+....+6+1-n)$

و بنفس طريقة السؤال السابق نبين أن : $(6^{n-1}+6^{n-2}+...+6+1)-n\equiv n-n\equiv 0[5]$

منه : $(6^{n-1}+6^{n-2}+...+6+1)-n=5k\ /k\in IN$ بالتالي : بين أن : $6^n\equiv 1+5n[25]$

**تمرين 3** : $a$ و $b$ و $c$ و $d$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

- إذا كان $a$ زوجي فإن : $a^{4b+d}$ و $a^{4c+d}$ زوجيان ، و إذا كان $a$ فردي فإن : $a^{4b+d}$ و $a^{4c+d}$ فرديان

في كلا الحالتين $a^{4b+d}-a^{4c+d}$ زوجي، منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[2]$

- إذا كان $a\equiv 0[3]$ فإن : $a^{4b+d}\equiv 0[3]$ و $a^{4c+d}\equiv 0[3]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[3]$

في الحالة الآخرى نستنتج أن : $3\wedge a=1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^2\equiv1[3]$ منه : $a^{4b}\equiv1[3]$ و $a^{4c}\equiv1[3]$

منه : $a^{4b}\equiv a^{4c}[3]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv0[3]$ ، في كل الحلات نجد أن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv0[3]$

▪ إذا كان $a\equiv0[5]$ فإن : $a^{4b+d}\equiv0[5]$ و $a^{4c+d}\equiv0[5]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv0[5]$

في الحالة الآخرى نستنتج أن : $5\wedge a=1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^4\equiv1[5]$ منه : $a^{4b}\equiv1[5]$ و $a^{4c}\equiv1[5]$

منه : $a^{4b}\equiv a^{4c}[5]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv0[5]$ ، في كل الحلات نجد أن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv0[5]$

بما أن 2 و 3 و 5 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv0[30]$

**<u>تمرين 4</u>** : $p$ عدد أولي أكبر من 2 و $n$ عدد صحيح طبيعي غير منعدم.(السؤالان مستقلان)

**1**

بدراسة زوجية العدد $n$ نستنتج بسهولة أن : $(n+1)^p\equiv n^p+1\,[2]$

من جهة أخرى و حسب مبرهنة فيرما $\begin{cases}(n+1)^p\equiv n+1\,[p]\\ n^p\equiv n\,[p]\end{cases}$ منه : $(n+1)^p-n^p\equiv1\,[p]$

أي : $(n+1)^p\equiv n^p+1\,[p]$

و بما أن $p$ عدد أولي أكبر من 2 فإن : $p\wedge2=1$ بالتالي : $(n+1)^p\equiv n^p+1\,[2p]$

**2**

لدينا $p>2$ منه : $p^2-p>0$ ، منه : $n^{p^2}-n^p=n^p\left(n^{p^2-p}-1\right)$

▪ إذا كان : $n\equiv0[p]$ فإن : $n^2\equiv0[p^2]$ منه : $n^{p^2}-n^p=n^2\,n^{p-2}\left(n^{p^2-p}-1\right)\equiv0\left[p^2\right]$

▪ في الحالة الأخرى يكون لدينا : $n\wedge p=1$ ، إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $n^p\equiv1[p]$

منه : $n^{p^2-p}-1=\left(n^p\right)^{p-1}-1=\left(n^p-1\right)\left[\left(n^p\right)^{p-2}+\left(n^p\right)^{p-3}+...+n^p+1\right]$

من $n^p\equiv1[p]$ نستنتج أن : $\left(n^p\right)^{p-2}+\left(n^p\right)^{p-3}+...+n^p+1\equiv p\equiv0\,[\,p\,]$

إذن : $\left(n^p\right)^{p-2}+\left(n^p\right)^{p-3}+...+n^p+1\equiv\ \ p/\ \ \in IN$ و $n^p-1=p\sim/\sim\in IN$

منه: $n^{p^2}-n^p=n^p\sim\ \ p^2$ ، منه : بين أن : $n^{p^2}\equiv n^p\left[p^2\right]$

في جميع الحالات نستنتج أن : $n^{p^2}\equiv n^p\left[p^2\right]$

**<u>تمرين 5</u>** : $n$ عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 .

**1**

لدينا : $A_n=n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$

و بما أن : $n^2+n+1>1$ و $n^2+n+1=n(n-1)+1>1$ ، إذن $A_n$ غير أولي.

**2**

بدراسة زوجية العدد $n$ نستنتج أن $n^4+n^2$ زوجي ، إذن $A_n$ عدد فردي

ما يعني أن التفكيك الأولي للعدد $A_n$ لا يحتوي على العدد 2

**3**

بين أن : $n\wedge3=1\ \Rightarrow\ 3/A_n$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n\wedge3=1\ \Rightarrow\ n^2\equiv1[3]\ \Rightarrow\ n^4\equiv1[3]\Rightarrow n^4+n^2+1\equiv3\equiv0\,[\,3\,]\ \Rightarrow\ 3/A_n$

**<u>تمرين 6</u>** : $a$ و $b$ و $x$ أعداد من $IN^*$ حيث $x>1$ ، نضع : $a\wedge b=d$

**1**

لدينا : $a\wedge b=d$ $\quad\exists(\sim,\ \ )\in IN^2\ /\begin{cases}a=d\sim\\ b=d\\ \sim\wedge\ \ =1\end{cases}$

ولدينا : $x^d \equiv 1[x^d-1]$ ، منه : $\begin{cases} x^{\sim d} \equiv 1[x^d-1] \\ x\ \ ^d \equiv 1[x^d-1] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{\sim d}-1 \equiv 0[x^d-1] \\ x\ \ ^d-1 \equiv 0[x^d-1] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^d-1 / x^{\sim d}-1 \\ x^d-1 / x\ \ ^d-1 \end{cases}$

إذن : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)$

**2**

$(E)\quad a\,x+by=d$

أ) لدينا : $\sim \wedge \quad =1$ إذن حسب مبرهنة Bezout فإن: $\exists(x_0,y_0)\in Z^2\ /\sim x_0+\quad y_0=1$

منه : $\sim d\,x_0+\quad d\,y_0=d$ أي : $a\,x_0+b\,y_0=d$

ما يعني أن المعادلة $(E)$ تقبل على الأقل حلا $(x_0,y_0)$ في $Z^2$

ب) $(E)\Leftrightarrow\ \sim x+\quad y=1\Leftrightarrow\ \sim x+\quad y=\sim x_0+\quad y_0\Leftrightarrow\ \sim(x-x_0)=\quad(y_0-y)$

$(E)\Leftrightarrow\begin{cases} x-x_0=\quad k \\ y_0-y=\sim k \end{cases}/k\in Z\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x=\quad k+x_0 \\ y=y_0-\sim k \end{cases}/k\in Z$

بالتالي : $S=\{(\quad k+x_0\ ,y_0-\sim k)/\ k\in Z\}$

ج) لنبحث عن إمكانية إيجاد زوج $(x,y)$ من مجموعة الحلول السابقة حيث يكون : $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\leq 0 \end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \quad k+x_0\geq 0 \\ y_0-\sim k\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k\geq\dfrac{-x_0}{\quad} \\ k\geq\dfrac{y_0}{\sim} \end{cases}$

إذن يكفي أن نأخذ : $k=k_0=Max\left(E\left(\dfrac{-x_0}{\quad}\right);E\left(\dfrac{y_0}{\sim}\right)\right)+1$

مما يعني صحة العبارة : $\exists(u,v)\in IN^2\ /\ \ au-bv=d$ حيث : $u=\quad k_0+x_0$ و

$v=-(y_0-\sim k_0)=\sim k_0-y_0$

د) لدينا: $(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d=x^{au}-1-x^{bv+d}+x^d=x^{au}-1-x^{au}+x^d=x^d-1$

**3**

لدينا من جهة حسب السؤال الأول : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)\quad(1)$

و من جهة أخرى : $\begin{cases} x^a\equiv 1[x^a-1] \\ x^b\equiv 1[x^b-1] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{au}\equiv 1[x^a-1] \\ x^{bv}\equiv 1[x^b-1] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^a-1/x^{au}-1 \\ x^b-1/x^{bv}-1 \end{cases}$

و حيث أن : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)$ فإن : $\begin{cases} (x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^a-1 \\ (x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^b-1 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} (x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^{au}-1 \\ (x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^{bv}-1 \end{cases}$

منه : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)/(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d$ أي : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^d-1\quad(2)$

من $(1)$ و $(2)$ نستنتج أن : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)=(x^{a\wedge b}-1)$