| السنة 2 بكالوريا علوم رياضية | الحسابيات<br>حلول مقترحة | سلسلة 1 |
|---|---|---|

**تمرين 1 :**

لدينا : $145\equiv 1[12]$ منه : $145^{2015}\equiv 1[12]$ إذن باقي القسمة الإقليدية لـ $145^{2015}$ على 12 هو 1

لدينا : $247\equiv 2[7]$ منه : $247^3\equiv 8[12]$ منه : $247^3\equiv 1[17]$ (لأن : $8\equiv 1[7]$ )

علما أن : $2015=3\times 671+2$ فإن : $\begin{cases}247^{3\times 671}\equiv 1[7]\\ 247^2\equiv 2^2[7]\end{cases}$ ومنه : $247^{2015}\equiv 4[7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ $247^{2015}$ على 7 هو 4

لدينا : $2015\equiv 2[11]$ منه : $2015^5\equiv 32[11]$ منه : $2015^5\equiv -1[11]$ (لأن : $32\equiv -1[11]$ )

علما أن : $2016=5\times 403+1$ فإن : $\begin{cases}2015^{5\times 403}\equiv (-1)^{403}\equiv -1[11]\\ 2015\equiv 2[11]\end{cases}$ ومنه : $2015^{2016}\equiv -2\equiv 9[11]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ $2015^{2016}$ على 11 هو 9

لدينا : $9\equiv 2[7]$ منه : $9^n\equiv 2^n[7]$ منه : $9^n+3\times 2^{n+1}\equiv 2^n+3\times 2^{n+1}[7]$ منه : $9^n+3\times 2^{n+1}\equiv 7\times 2^n\equiv 0[7]$

بالتالي : $7/3^{2n}+3\times 2^{n+1}$ $\forall n\in IN$

بالنسبة للقيم $n=1$ و $n=2$ العبارة صحيحة الآن ليكن : $n>2$

$$1\equiv 1[n-1]$$
$$n\equiv 1[n-1]$$

لدينا : $n^{n-1}-1=(n-1)(n^{n-2}+n^{n-3}+...+n+1)$ وبما أن : $n^k\equiv 1[n-1]$ (لأن : $n\equiv 1[n-1]\Rightarrow n^k\equiv 1[n-1]$ )

$$...\equiv ...$$
$$n^{n-2}\equiv 1[n-1]$$

فإن : $n^{n-2}+n^{n-3}+...+n+1\equiv n-1\equiv 0[n-1]$ منه : $n-1/n^{n-2}+n^{n-3}+...+n+1$

منه : $\exists m\in Z/\ n^{n-2}+n^{n-3}+...+n+1=m(n-1)$ منه ، $n^{n-1}-1=m(n-1)^2$

بالتالي : $(n-1)^2/n^{n-1}-1$ $\forall n\in IN^*$

**تمرين 2 :**

1 نضع : $d=(7a+3)\wedge(9a+4)$

منه : $\begin{cases}d/7a+3\\ d/9a+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/63a+27\\ d/63a+28\end{cases}\Rightarrow d/(63a+28)-(63a+27)\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1$

بالتالي : $(7a+3)\wedge(9a+4)=1$

2 نضع : $d=a\wedge b$ و $\delta=(9a+4b)\wedge(2a+b)$

منه : $\begin{cases}d/a\\ d/b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/2a\ \ et\ d/9a\\ d/b\ \ et\ \ d/4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/2a+b\\ d/9a+4b\end{cases}\Rightarrow d/\delta$

و : $\begin{cases}\delta/2a+b\\ \delta/9a+4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta/8a+4b\ \ et\ \delta/9a+4b\\ \delta/18a+9b\ \ et\ \delta/18a+8b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta/a\\ \delta/b\end{cases}\Rightarrow\delta/d$

منه : $\delta=d$ أي : $(9a+4b)\wedge(2a+b)=a\wedge b$

3 لدينا من جهة : $a\wedge(bc)=1\Rightarrow\exists(u,v)\in Z^2\ /\ au+bcv=1\Rightarrow\begin{cases}au+b(cv)=1\\ au+c(bv)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\wedge b=1\\ a\wedge c=1\end{cases}$

وعكسيا :

$$\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists(u_1,v_1)\in Z^2 \ / \ a\,u_1+b\,v_1=1 \\ \exists(u_2,v_2)\in Z^2 \ / \ a\,u_2+c\,v_2=1 \end{cases} \Rightarrow (a\,u_1+b\,v_1)(a\,u_2+c\,v_2)=1$$

$$\Rightarrow (a\,u_1u_2+cv_2u_1+bv_1u_2)a+(v_1v_2)bc=1$$

$$\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases} \Rightarrow a\wedge(bc)=1$$

بالتالي : $\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a\wedge(bc)=1$

أ) ليكن : $a\wedge b=1$ ، نضع : $d=(a+b)\wedge a$ و $\delta=(a+b)\wedge b$

لدينا : $d=(a+b)\wedge a \Rightarrow \begin{cases} d/a+b \\ d/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/b \\ d/a \end{cases} \Rightarrow d/a\wedge b \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1 \Rightarrow (a+b)\wedge a=1$

و : $\delta=(a+b)\wedge b \Rightarrow \begin{cases} \delta/a+b \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/a \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \delta/a\wedge b \Rightarrow \delta/1 \Rightarrow \delta=1 \Rightarrow (a+b)\wedge b=1$

الآن : $\begin{cases} (a+b)\wedge a=1 \\ (a+b)\wedge b=1 \end{cases} \Rightarrow (a+b)\wedge a\,b=1$

ب) ليكن : $a\wedge b=1$

لدينا : $(a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2)\wedge(a-b)(a+b)=(a-b)\left((a^2+ab+b^2)\wedge(a+b)\right)$

نضع : $d=(a^2+ab+b^2)\wedge(a+b)$ ، منه و باستعمال نتيجة السؤال السابق نجد :

$$\begin{cases} d/a+b \\ d/(a+b)^2-ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/(a+b)^2 \\ d/(a+b)^2-ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a+b \\ d/ab \end{cases} \Rightarrow d/(a+b)\wedge ab \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

بالتالي : $a\wedge b=1 \Rightarrow (a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2)=a-b$

ج) نضع : $d=a\wedge b$ منه : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \ \begin{cases} a=\alpha\, d \\ b=\beta\, d \end{cases} / \alpha\wedge\beta=1$

منه : $(a^2+b^2)\wedge a\,b=(d^2(\alpha^2+\beta^2))\wedge d^2\alpha\,\beta=d^2\left((\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha\,\beta\right)$

نضع : $d=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha$ و $\delta=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta$

لدينا حسب نتيجة سابقة : $\alpha\wedge\beta=1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta=1 \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta\times\beta=1 \\ \alpha\times\alpha\wedge\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta^2=1 \\ \alpha^2\wedge\beta=1 \end{cases}$

منه : $d=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2+\beta^2 \\ d/\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2+\beta^2 \\ d/\alpha^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\beta^2 \\ d/\alpha \end{cases} \Rightarrow d/\alpha\wedge\beta^2 \Rightarrow d=1$

و : $\delta=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2+\beta^2 \\ \delta/\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2+\beta^2 \\ \delta/\beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2 \\ \delta/\beta \end{cases} \Rightarrow \delta/\alpha^2\wedge\beta \Rightarrow \delta=1$

الآن : $\begin{cases} (\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha=1 \\ (\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta=1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha\beta=1$ بالتالي : بين أن : $(a^2+b^2)\wedge a\,b=d^2=(a\wedge b)^2$

لدينا :

$$a\wedge b=1 \Rightarrow \exists(u,v)\in Z^2 \ / \ a\,u+b\,v=1 \Rightarrow au=1-bv \Rightarrow a^2u^2=1-2\,bv+b^2v^2$$

$$\Rightarrow 2bv=1+b^2v^2-a^2u^2 \Rightarrow 4b^2v^2=1+b^4v^4+a^4u^4+2b^2v^2-2a^2u^2-2a^2b^2u^2v^2$$

$$\Rightarrow a^2(2u^2+2b^2u^2v^2-a^2u^4)+b^2(2v^2-b^2v^4)=1$$

$$a\wedge b=1 \Rightarrow a^2\wedge b^2=1$$

4

أ) ليكن : $a^2/b^2$ و نضع : $d=a\wedge b$

إذن : $b^2=k\,a^2$ $\exists k\in IN^2$ و $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \ \begin{cases} a=\alpha\, d \\ b=\beta\, d \end{cases} / \alpha\wedge\beta=1$

منه : $d^2\beta^2=k\,d^2\alpha^2$ منه : $\beta^2=k\alpha^2$ منه : $\alpha^2/\beta^2$ وحيث أن : $\alpha^2/\alpha^2$ فإن: $\alpha^2/\alpha^2\wedge\beta^2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | وبما أن : $\alpha^2 \wedge \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha \wedge \beta = 1$ فإن : $\alpha^2 / 1$ منه: $\alpha = 1$<br>منه : $\begin{cases} a = d \\ b = \beta d \end{cases}$ منه : $b = a d$ بالتالي : $a / b$ | |
| | ب) | بوضع : $d = a \wedge b$ نستنتج أن : $\exists(\alpha,\beta) \in IN^2 \quad \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1$<br>و باستعمال نتيجة السؤال ج) نجد : $a^2 \wedge b^2 = d^2(\alpha^2 \wedge \beta^2) = d^2 \times 1 = d^2 = (a \wedge b)^2$ | |
| | ج) | نفترض أن : $\sqrt{5} \in Q$ إذن : $\exists(a,b) \in IN \times IN^* \ / \ \sqrt{5} = \frac{a}{b}$ منه : $5b^2 = a^2$ منه: $b^2 / a^2$<br>و باستعمال نتيجة السؤال أ) نستنتج أن : $b / a$ منه : $\exists k \in IN \ / \ a = kb$ منه : $5b^2 = k^2 b^2$<br>منه : $5 = k^2$ وبما أن: $4 < 5 < 9$ فإن : $4 < k^2 < 9$ منه : $2 < k < 3$ و هذا غير ممكن<br>بالتالي : $\sqrt{5} \notin Q$ | |
| 5 | أ) | ليكن $a \wedge b = 1$ و لنبين بالترجع أن : $\left( \forall n \in IN^* \quad a \wedge b^n = 1 \right)$<br>بالنسبة لـ $n = 1$ : العبارة صحيحة<br>الآن نفترض أن : $a \wedge b^n = 1$ و لنبين أن: $a \wedge b^{n+1} = 1$<br>باستعمال نتيجة السؤال 3) نجد بسهولة أن : $\begin{cases} a \wedge b^n = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge b^n \times b = 1 \Rightarrow a \wedge b^{n+1} = 1$<br>و هذا ينهي البرهان.<br>يجب الانتباه جيدا للعبارة، الافتراض لا يجب أن يتم على العبارة ككل بل على نتيجة الاستلزام فقط (إنه المنطق الرياضي) | |
| | ب) | ليكن : $(n,m) \in IN^* \times IN^*$ ، باستعمال نتيجة السؤال السابق مرتين نجد أن:<br>استنتج أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b^m = 1 \Rightarrow b^m \wedge a = 1 \Rightarrow b^m \wedge a^n = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^m = 1$<br>نتيجة هذا السؤال هي خاصية بالدرس يمكن استعمالها دون برهان، لذلك فالهدف من السؤال هو تقديم برهان هذه الخاصية<br>نفس الشيء ينطبق على السؤال الثالث | |
| | ج) | نفترض أن : $\log_{10}(2) \in Q$ إذن : $\exists \in (m,n) \in Z \times IN^* \ / \ 2^{\frac{m}{n}} = 10$ منه : $2^m = 10^n$ منه :<br>منه : $2^m = 2^n \times 5^n$ منه : $5^n / 2^m$ و حيث أن : $5^n / 5^n$ فإن : $5^n / 2^m \wedge 5^n$<br>و لكون : $2 \wedge 5 = 1$ فحسب السؤال السابق نستنتج أن: $2^m \wedge 5^n = 1$ منه : $5^n / 1$ أي : $5^n = 1$<br>منه : $n = 0$ و هذا يناقض كون : $n \in IN^*$<br>بالتالي : $\log_{10}(2) \notin Q$ | |

الهدف من هذا التمرين هو التمكن من استعمال القواعد الهامة التالية:

- مبرهنة Bezout (لأنها أحيانا تكون الوسيلة الوحيدة للبرهان)
- $a \wedge (bc) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases}$ ، $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^m = 1$ ، $d = a \wedge b \Rightarrow \exists(\alpha,\beta) \in Z^2 \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1$
- مبرهنة كوص (Gauss): $\begin{cases} a / bc \\ a \wedge b \end{cases} \Rightarrow a / c$ ، $ac \wedge bc = c(a \wedge b)$

**تمرين 3** :

لدينا : $\begin{cases} x = 7k \\ y = 5k \end{cases} / k \in Z \Leftrightarrow 5x = 7y \Leftrightarrow 10x = 14y$ بالتالي: $S = \{(7k;5k) / k \in Z\}$

$$3x-2y=1 \Leftrightarrow 3x-2y=3-2 \Leftrightarrow 3(x-1)=2(y-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2k \\ y-1=3k \end{cases} /k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k+1 \\ y=3k+1 \end{cases} /k\in Z$$

بالتالي: $S=\{(2k+1;3k+1)/k\in Z\}$

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص: $(2;-3)$ منه:

$$17x+11y=1 \Leftrightarrow 17x+11y=2\times17-3\times11 \Leftrightarrow 17(x-2)=11(-y-3)$$

$$17x+11y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=11k \\ -y-3=17k \end{cases} /k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=11k+2 \\ y=-17k-3 \end{cases} /k\in Z$$

بالتالي: $S=\{(11k+2;-17k-3)/k\in Z\}$

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=1$ هو $(2;3)$ منه الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=7$ هو $(14;21)$ ، منه:

$$5x-3y=1 \Leftrightarrow 5x-3y=5\times14-3\times21 \Leftrightarrow 5(x-14)=3(y-21)$$

$$5x-3y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-14=3k \\ y-21=5k \end{cases} /k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k+14 \\ y=5k+21 \end{cases} /k\in Z$$

بالتالي: $S=\{(3k+14;5k+21)/k\in Z\}$

$$10x-2y=6 \Leftrightarrow 5x-y=3 \Leftrightarrow y=5x-3$$

بالتالي: $S=\{(k;5k-3)/k\in Z\}$

عندما يكون أحد المعاملات 1 أو $-1$ فنكتفي بكتابة أحد المجهولين بدلالة الآخر.

لدينا : $15x+6y=11 \Rightarrow 3(5x+2y)=11 \Rightarrow 3/11$ بالتالي : $S=\phi$

**تمرين 4** : $a$ و $b$ عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .

1 انظر السؤال 3 أ من التمرين السابق

2 بوضع: $\begin{cases} d=x\wedge y \\ \Delta=x\vee y \end{cases}$ نستنتج أن: $\begin{cases} x=\alpha d \\ y=\beta d \end{cases} /\alpha\wedge\beta=1$ ، $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2$ وأن $d\Delta=xy$

منه: $d\Delta=\alpha\beta d^2$ منه: $\Delta=\alpha\beta d$

منه: $(x+y)\wedge(x\vee y)=(d\alpha+d\beta)\wedge\alpha\beta d=d((\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta)$

ولكون: $\alpha\wedge\beta=1$ و حسب السؤال السابق نستنتج أن: $(\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta=1$

بالتالي: $(x+y)\wedge(x\vee y)=d=x\wedge y$

3 بوضع: $\begin{cases} d=x\wedge y \\ \Delta=x\vee y \end{cases}$ نستنتج أن: $\begin{cases} x=\alpha d \\ y=\beta d \end{cases} /\alpha\wedge\beta=1$ ، $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2$ وباستعمال النتيجة السابقة

$$\begin{cases} x+y=276 \\ x\vee y=1440 \\ x<y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=276\wedge1440 \\ d(\alpha+\beta)=276 \\ \alpha\beta d=1440 \\ \alpha<\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=12 \\ \alpha+\beta=23 \\ \alpha\beta=120 \\ \alpha\wedge\beta=1 \\ \alpha<\beta \end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta)\in\{(8;15)\}$$

نستنتج أن: $(\alpha,\beta)\in\{(8;15)\}$

منه: $(x,y)=(96;180)$ ، عكسيا نتحقق بسهولة من أن هذا الزوج يحقق النظمة المقترحة

خلاصة: $S=\{(96;180)\}$