الأستاذ : أحمد مومني

تمارين حول درس الحسابيات

ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

السنة الثانية علوم رياضية

التمرين رقم 01

1 – بين أن: $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{n} p^2\right)$

2 – لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$ و $d_n = S_n \wedge S_{n+1}$

a – أحسب d_n في حالة n عدد فردي وفي حالة n عدد زوجي

b – استنتج أن: $S_n \wedge S_{n+1} \wedge S_{n+2} = 1$ و أن $d_n \neq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

التمرين رقم 02:

ليكن α و β و n ثلاثة أعداد صحيحة نسبية غير منعدمة بحيث : $2n^2 = (\alpha - 2n)(\beta - 2n)$

نضع : $d = (\alpha - 2n) \wedge (\beta - 2n)$

1 – ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{Z}^*$

a – بين أن : $\left(x \wedge y = 1 \text{ و } x^2 / y^2 \right) \Rightarrow |x| = 1$

b – استنتج أن : $x^2 / y^2 \Rightarrow x / y$

2 – a – استنتج إذا كان d فردي فإن d / n

b – استنتج إذا كان d زوجي فإن $d / 2n$

c – استنتج أن: d يقسم $\alpha \wedge \beta$

3 – بين أن: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta - 2n)^2$ و أستنتج أن: $\alpha \wedge \beta$ يقسم d

4 – بين أن: $\alpha \wedge \beta$ يقسم n

التمرين رقم 03:

ليكن α و β عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $1 < \beta < \alpha$ و $\alpha \wedge \beta = 1$

و β_1 و β_2 و $\cdots$ و β_n أعداد صحيحة طبيعية بحيث: $\beta_i \wedge \beta = 1$ و $\beta_i < \beta$ $\quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

1 – بين أن : β_i يقبل مقلوبا في المجموعة $\mathbb{Z}/\beta\mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

2 – بين أن: $\alpha\beta_i$ غير قابل للقسمة على β $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

3– لكل $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ليكن r_i باقي القسمة الاقليدية للعدد $\alpha\beta_i$ على β

a – بين أن: $r_i \wedge \beta = 1$ مهما يكن $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

b – بين أنه لكل i و j من $\{1, 2, \cdots, n\}$ بحيث $i \neq j$ فإن $r_i \neq r_j$

c – حدد المجموعة $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$

d – بين أن : $\alpha^n \equiv 1[\beta]$

4 – بين أن العدد $17^6 - 1$ يقبل القسمة على 6

التمرين رقم 04:

1 – a – بين أن : $(2n+1)\wedge n^2=1 \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

b – استنتج أن:
$$(\forall (n,d)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*)\quad d/(2n+1)\Rightarrow d\wedge n^2=1$$

2 – حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث $(2n+1)\wedge 5=5$

3 – a – بين أن :
$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad n^2(n^2+1)\wedge(2n+1)=(2n+1)\wedge 5$$

b – حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث $n^2(n^2+1)\wedge(2n+1)=1$

التمرين رقم 05:

ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين يحققان النظمة التالية :
$$\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ x\wedge y=1 \end{cases}$$

1 – بين أن x و y ليست لهما نفس الزوجية

2 – نفترض أن x زوجي

a – بين أن : $(25-x)\wedge(25+x)=1$

b – بين أنه يوجد عددان صحيحان طبيعيان فرديان n وp بحيث:
$$\begin{cases} 25+x=p^2 \\ 25-x=n^2 \\ n\wedge p=1 \end{cases}$$

3 – حدد العددين الصحيحين الطبيعيين x وy

4 – استنتج في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ مجموعة حلول المعادلة $x^2+y^2=625$

التمرين رقم 06:

1 – حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $5x-7y=5$

2 – حدد الأعداد الصحيحة النسبية x التي تحقق المعادلتين : $x\equiv 0[5]$ و $x\equiv 5[7]$

3 – ليكن n عددا صحيحا طبيعيا كتابته في نظمة العد ذات الأساس 6 هي : $n=\overline{\alpha30002\beta}^{(6)}$

حدد α وβ لكي يكون n قابلا للقسمة على العدد 35

التمرين رقم 07:

1 –جدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x و y و z التي تحقق

a – النظمة التالية
$$\begin{cases} \overline{xyzx}^{(10)}\equiv 0\,[7] \\ \overline{xyzx}^{(10)}\equiv 1[99] \end{cases}$$

b – المعادلة $\overline{xyz}^{(7)}=\overline{zyx}^{(11)}$

التمرين رقم 08:

ليكن n عددا أوليا أكبر من أو يساوي 3

1 – بين أن : n يقسم C_n^p مهما يكن $p\in\{1,2,\dots,n-1\}$

2 – لكل p من $\{1,2,\dots,n-1\}$ نضع $U_p=\frac{1}{n}C_n^p$

a – بين أن: n يقسم $pU_p+(-1)^p$ مهما يكن $p\in\{1,2,\dots,n-1\}$

b – بين أن: $n(U_1+U_2+\cdots+U_{n-1})=2^n-2$

3 – ليكن $\overline{p}$ صنف تكافؤ p و $(\overline{p})^{-1}$ مقلوب $\overline{p}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ حيث $p\in\{1,2,\dots,n-1\}$

a – بين أن:. $(\overline{1})^{-1}+(\overline{2})^{-1}+\cdots+(\overline{n-1})^{-1}=\overline{0}$

b – بين أن : $(\overline{1})^{-1}+(\overline{2})^{-1}+\cdots+(\overline{n-2})^{-1}=\overline{\left(\frac{2^{n-1}-1}{n}\right)}$

التمرين رقم 09:

1 – حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $(E):\quad 3x-2y=1$

2 – ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و $d=(2n+1)\wedge(21n+4)$

a – بين أن الزوج $(14n+3,21n+4)$ حل للمعادلة (E) "

b – بين أن : $d=1$ أو $d=13$

c – بين أن: $d=13\Leftrightarrow n\equiv 6[13]$

4 – نضع $A_n=21n^2-17n-4$ و
$$B_n=28n^3-8n^2-17n-3\quad (\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$$

a – بين أن العددين A_n و B_n قابلان للقسمة على $n-1$ في $\mathbb{Z}$

b – حدد حسب قيم العدد n القاسم المشترك الأكبر للعددين

التمرين رقم 10:

I – حدد في نظمة العد العشري العددين الصحيحين الطبيعيين اللذين يكتبان في نظمة العد ذات الأساس 5 على الشكل التالي: $\overline{n01n}^{(5)}$ حيث n عدد صحيح طبيعي أولي

II – 1 – ليكن α وβ عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $(\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta=p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي

a – بين أن: p^2/α^2 و استنتج

b – بين أن $\alpha\wedge\beta=p$ أو $\alpha\wedge\beta=p^2$

2 – نعتبر في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية
$$(S):\begin{cases} (\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta=49 \\ \alpha\vee\beta=231 \end{cases}$$

a – بين أن $\alpha\wedge\beta=7$

b – حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة (S)

AHMED MOUMNI

- تمارين من الامتحانات الوطنية حول درس الحسابيات -

التمرين الأول (الدورة الاستدراكية – 2007)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ حيث a و b و p و q أعداد صحيحة نسبية و $p \wedge q = 1$

1- أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$

ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S)

2 – ليكن x حلا للنظمة (S) بين أن pq يقسم $x - x_0$

3 – ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم $x - x_0$ بين أن x حل للنظمة (S)

4 – استنتج مجموعة حلول النظمة (S)

5 – حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

التمرين رقم 02: (الدورة العادية – 2005)

I – p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 5

1 – بين أن: $p^2 \equiv 1[3]$

2 – أ – باستعمال زوجية العدد p بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث: $p^2 - 1 = 4q(q+1)$

ب – استنتج أن: $p^2 \equiv 1[8]$

3 – بين أن : $p^2 \equiv 1[24]$

II – ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع 24

1 – بين أن: $a^2 \equiv 1[24]$

2 – هل توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و $\cdots$ و a_{23} حيث $a_k \wedge 24 = 1$ $\quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, 23\}$

و $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{23}^2 = 23997$

التمرين رقم 03: (الدورة العادية – 2003)

نعتبر في $(IN^*)^2$ المعادلة (E) التالية : $x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$

ليكن (x, y) عنصرا من $(IN^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x = \delta a$ و $y = \delta b$

1 – نفترض أن: (x, y) حل للمعادلة (E)

أ – تحقق أن: $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$

ب – استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$

ج – بين أن: $a = 1$

د – استنتج أن: $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$

2 – حل في $(IN^*)^2$ المعادلة (E)

AHMED MOUMNI

التمرين رقم 04 (الدورة العادية – 2004)

-1 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا

أ) بين أنه إذا كان n فرديا فإن $n^2 \equiv 1[8]$

ب) بين أنه إذا كان n زوجيا فإن $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$

-2 لتكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية

أ) بين أن $a^2+b^2+c^2$ ليس مربعا كاملا (أي ليس مربع لعدد صحيح طبيعي)

ب) بين أن $2(ab+bc+ac) \equiv 6[8]$

(يمكن ملاحظة $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+abc+2ac$)

ج) استنتج أن $2(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا

د) بين أن $ab+bc+ac$ ليس مربعا كاملا

....

التمرين رقم 05 : (الدورة الاستدراكية – 2004)

1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: : $(E): 3x-2y=1$

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

أ) بين أن الزوج $(14n+3, 21n+4)$ حل للمعادلة (E)

ب) استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أولين فيما بينهما

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$

أ) بين أن $d=1$ أو $d=13$

4) من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq 2$ نضع :

$A = 21n^2-17n-4$ و $B = 28n^3-8n^2-17n-3$

أ) بين أن العددين A وB قابلين للقسمة علي $n-1$ في المجموعة $\mathbb{Z}$

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

....

التمرين رقم 06 : (الدورة العادية – 2007)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 195x-232y=1$

أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232

ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\left\{(163+232k ; 137+195k)/k\in\mathbb{Z}\right\}$

ج) أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1[232]$

2) بين أن 233 عدد أولي

3) لتكن Aمجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232

نعتبر التطبيق f من A نحو Aالمعرفة بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233

نقبل أن: $a^{232} \equiv 1[233]$ $\left(\forall a \in A\setminus\{0\}\right)$

أ) بين أنه لكل عنصرين a و bمن المجموعة A إ ذا كان $f(a)=f(b)$ فإن $a=b$

ب) ليكن a وb عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a)=b$, حدد a بدلالة b

ج) استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1}

AHMED MOUMNI