6) الفضاءات المتجهية الحقيقية :

قانون تركيب خارجي

لتكن A و E مجموعتين غير فارغتين

f قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في A $\Leftrightarrow$ $$f : \begin{array}{ccc} A\times E & \to & E \\ (\alpha,x) & \mapsto & f(\alpha,x) \end{array}$$

عادة ما نرمز ل $f(\alpha,x)$ ب $\alpha.x$ أو αx

الفضاء المتجهي

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ و بقانون تركيب خارجي $\bullet$ معاملاته في $\mathbb{R}$
نقول أن $(E,*,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

1. $(E,*)$ زمرة تبادلية
2. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in E \quad (\alpha+\beta).x=\alpha x+\beta x$
3. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in E \quad (\alpha\beta).x=\alpha.(\beta x)$
4. $\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall(x,y)\in E^2 \quad \alpha.(x*y)=\alpha.x*\alpha.y$
5. $\forall x\in E \quad 1.x=x$

ترميز : سنرمز ل $*$ ب $+$ و لكل عنصر x من E بالرمز $\vec{x}$ و نسميه متجهة

$(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

1. $(E,+)$ زمرة تبادلية
2. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall\vec{x}\in E \quad (\alpha+\beta).\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$
3. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall\vec{x}\in E \quad (\alpha\beta).\vec{x}=\alpha.(\beta\vec{x})$
4. $\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2 \quad \alpha.(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha.\vec{y}$
5. $\forall\vec{x}\in E \quad 1.\vec{x}=\vec{x}$

قواعد الحساب في فضاء متجهي

ليكن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

1. $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$
2. $(\forall \alpha\in\mathbb{R})(\forall \vec{x}\in E)\quad \alpha.\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha=0$ أو $\vec{x}=\vec{0}$
3. $(\forall \alpha\in\mathbb{R})(\forall \vec{x}\in E)\quad (-\alpha).\vec{x}=\alpha.(-\vec{x})=-(\alpha.\vec{x})$
4. $(\forall \alpha\in\mathbb{R})(\forall (\vec{x},\vec{y})\in E^2)\quad \alpha.(\vec{x}-\vec{y})=\alpha.\vec{x}-\alpha.\vec{y}$
5. $(\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)(\forall \vec{x}\in E^2)\quad (\alpha-\beta).\vec{x}=\alpha.\vec{x}-\beta.\vec{x}$

الفضاء المتجهي الجزئي

ليكن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير فارغ من E
نقول أن F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا كان :

1. $(\forall (\vec{x},\vec{y})\in F^2)\quad \vec{x}+\vec{y}\in F$ F مستقر بالنسبة للقانون الداخلي $+$
2. $(\forall \vec{x}\in F)(\forall \lambda\in\mathbb{R})\quad \lambda.\vec{x}\in F$ F مستقر بالنسبة للقانون الداخلي $\cdot$

الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي

F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall (\vec{x},\vec{y})\in F^2)(\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)\quad \alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}\in F$$

التأليفات الخطية

لتكن $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و .... و $\vec{x}_n$ متجهات من الفضاء المتجهي E و α_1 و α_2 و .... و α_n أعداد حقيقية

المتجهة $\vec{x}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.\vec{x}_i$ تسمى تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و .... و $\vec{x}_n$ ذات المعاملات α_1 و α_2 و ...... و α_n

أسرة مولدة

الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,......,\vec{x}_n)$ مولدة للفضاء $E \Leftrightarrow \forall \vec{x}\in E,\exists(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n /\quad \vec{x}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.\vec{x}_i$

أسرة حرة

الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,......,\vec{x}_n)$ حرة $\Leftrightarrow$

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n /\quad \sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.\vec{x}_i=\vec{0}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=......=\alpha_n=0$$

أساس فضاء متجهي حقيقي

الأسرة $B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,.....,\vec{x}_n\right)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow$ $\forall\vec{x}\in E,\exists!\left(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n\right)\in\mathbb{R}^n\ /\ \ \vec{x}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.\vec{x}_i$

- الأسرة $B=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,.....,\vec{x}_n\right)$ أساس للفضاء E $\Leftrightarrow$ B أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E
- عدد متجهات الأساس B يسمى بعد الفضاء المتجهي E و نرمز له ب $\dim E$ ($\dim E=cardB$)