

I. القوانين التركيب الداخلية :

A. تعاريف :

1. تعريف 1 :

E مجموعة غير فارغة .

$$f : E \times E \rightarrow E$$

كل تطبيق على الشكل التالي : $(a,b) \mapsto f((a,b))$ يسمى قانون تركيب داخلي في E . و بدل من استعمال f نستعمل أحد الرموز

التالية : * أو T أو \perp أو \circ أو \wedge أو \vee أو + أو \times أو \otimes أو \oplus أو \odot أو

• نكتب : $f((a,b)) = a \perp b$.

• نكتب : (E, \perp) ؛ نقول إن E مزود بقانون التركيب الداخلي \perp .

• $\forall (a,b) \in E \times E : a \perp b \in E$.

2. أمثلة :

• الجمع و الضرب قانونين تركيبيين داخليين في كل من المجموعات التالية : \mathbb{C} و \mathbb{R} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{N} ;

• $(\mathcal{P}(E), \cap)$ و $(\mathcal{P}(E), \cup)$ و $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ لدينا : $\mathcal{P}(E)$ (مجموعة أجزاء E) مزود بقوانين تركيب داخلية .

• الجمع قانون تركيب داخلي في المستوى المتجهي V_2 و كذلك في الفضاء المتجهي V_3 أما الجداء السلمي ليس بقانون تركيب داخلي لا في

V_2 و لا في V_3 (لأن $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$) .

• الجداء المتجهي $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ قانون تركيب داخلي في الفضاء المتجهي V_3 .

• $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ مجموعة التطبيقات في \mathbb{R} (من \mathbb{R} إلى \mathbb{R}) .

مثال : لدينا : f تطبيق في \mathbb{R} ومنه : $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = 2x + 3$

$(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +)$ و $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \times)$ و $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \circ)$ لدينا : $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ مزود بقوانين تركيب داخلية هي الجمع و الضرب و تركيب تطبيقين

• $E = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ مجموعة التطبيقات التقابلية في \mathbb{R} (من \mathbb{R} إلى \mathbb{R}) .

مثال : لدينا : f تطبيق تقابلي في \mathbb{R} ومنه : $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = 2x$

الجمع ليس بقانون تركيب داخلي في $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مثال مضاد : $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ و $-f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ و لكن $f + (-f) = \theta \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ؛ مع

$$\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

• θ هو التطبيق المعرف بما يلي : $x \mapsto \theta(x) = 0$

3. قانون تركيب داخلي في مجموعة منتهية :

• نشاط :

• نعتبر المجموعة $E = \{0, 1, 2\}$

1. تأكد أن : * قانون داخلي في E حيث * معرفة كما يلي :


$$\forall (a,b) \in E \times E : a * b = a + b - ab$$

4. جدول قانون داخلي :

• نلخص النتائج السابقة بالجدول التالي يسمى جدول $(E, *)$.

• أنشئ جدول : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ و $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \times)$

جدول $(E, *)$

| | | | |
|---|---|---|---|
|  * | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

| جدول $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \times)$ | | | | | | مثال n=5 | جدول $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ | | | | | |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| \times | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | | $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | | $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | | $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ | | $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |

مصفوفات : II

A مجموعة المصفوفات $M_{m,n}(\mathbb{R})$:

تعريف : I

ليكن m و n من \mathbb{N}^* مصفوفة $m \times n$ هو جدول من الأعداد الحقيقية متكون من m من الأسطر (lignes) و n من الأعمدة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ (colonnes) ونكتب}$$

- الأعداد الحقيقية a_{ij} تسمى معاملات المصفوفة A .
- متفق عليه : المدل الأول i هو رقم السطر . المدل الثاني j هو رقم العمود .
- نكتب المصفوفة A على الشكل التالي : $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ أو أيضا $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ligne n}^\circ 1 \\ \leftarrow \text{ligne n}^\circ 2 \\ \\ \end{matrix}$$

↑
colonne n° 2

2. للتوضيح :

3. أمثلة ومفردات :

- الجدول التالي : $(3 \ 1 \ 4 \ 2 \ 6)$ يمثل مصفوفة من سطر و خمسة أعمدة .
- الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من ثلاثة أسطر و عمود واحد .
- الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من سطرين و ثلاثة أعمدة من .

• الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من سطرين و عمودين . تسمى مصفوفة مربعة من الرتبة 2 .

• الجدول التالي : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & -7 & 5 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ يمثل مصفوفة من ثلاثة أسطر و ثلاثة أعمدة . تسمى مصفوفة مربعة من الرتبة 3 .

• نعتبر المصفوفة التالية : $A = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 9 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. التوضيح التالي :

$\xrightarrow{\text{vecteur ligne n}^\circ 2}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 9 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

\uparrow

 vecteur colonne n° 4

1. المصفوفة : $(7 \ -5 \ 4 \ 1 \ 0)$ تسمى متجهة سطر رقم 2 للمصفوفة A .

2. المصفوفة : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ تسمى متجهة عمود رقم 4 للمصفوفة A .

4 مفردات و رموز و أمثلة :

• مجموعة المصفوفات $m \times n$ نرمز لها ب : $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

• حالة $m = n$ المصفوفة $n \times n$ تسمى مصفوفة مربعة من الرتبة n أما المجموعة $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ نرمز لها باختصار $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. مثال :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & -7 & 5 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

• في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

1. المصفوفة المنعدمة : حيث لكل i و j من $\{1,2,\dots,n\}$ لدينا : $a_{ij} = 0$ و $a_{ij} = 0$. نرمز لها ب $0_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

مثال : $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة المنعدمة ل $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة المنعدمة ل $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. المصفوفة الواحدة : حيث لكل i و j من $\{1,2,\dots,n\}$ لدينا : $a_{ii} = 1$ و $a_{ij} = 0$ مع $i \neq j$. نرمز لها ب

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

مثال : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة الوحدة ل $M_2(\mathbb{R})$. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة الوحدة ل $M_3(\mathbb{R})$.

B. العمليات في مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 أو 3 (أي في $M_2(\mathbb{R})$ أو في $M_3(\mathbb{R})$) .

في هذه الفقرة نعتبر المصفوفتين $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ و $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ من المجموعة $M_n(\mathbb{R})$ فقط $n \in \{2, 3\}$.

1. الجمع في $M_n(\mathbb{R})$:

1. تعريف :

مجموع المصفوفتين A و B هي المصفوفة $S = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ مع $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ونكتب $S = A + B$.

• حالة $n = 2$: $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{21} \end{pmatrix}$

• حالة $n = 3$: $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$

2. مثال :

مثال ل $n = 2$:

• مثال 1 : $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ مثال 2 : $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$

مثال ل $n = 3$:

• مثال 1 : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -8 \\ 7 & 10 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 14 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 2 & 10 & 6 \\ 10 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ مثال 2 : $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -8 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 11 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 3 \\ 5 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

2. الضرب مصفوفة من $M_2(\mathbb{R})$ في عدد حقيقي :

1. تعريف :

$\lambda A = \lambda (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$: λA : جداء عدد حقيقي λ في المصفوفة A هي المصفوفة :

• حالة $n = 2$: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$

• حالة $n = 3$: $\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$

2. مثال :

$$0 \times \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad 1 \times \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad 2 \times \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 22 & 0 \end{pmatrix}$$

3. جداء مصفوفتان :

1. تعريف :

جداء المصفوفتين A و B هي المصفوفة $P = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ مع $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj}$ ونكتب : $P = A \times B$.

من أجل $n = 2$ لدينا : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=2} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j}$

من أجل $n = 3$ لدينا : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j}$

2. ملحوظة :

- لحساب المعامل c_{ij} في المصفوفة P نأخذ متجهة السطر رقم i من A و متجهة العمود رقم j من B (ونحسب ذلك على شكل الجداء السلمي).

$$\text{توضيح ل } n = 2 : c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{pmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j}$$

مثال : لإيجاد المعامل $c_{21} = ?$ في الجداء التالي : نأخذ السطر 2 من المصفوفة الأولى و

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ ? & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{العمود رقم 1 من المصفوفة الثانية ومنه : } ? = (2 \ 5) \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + 5 \times 11 = 61$$

3. أمثلة :

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \times 3 + 2 \times 1 & -5 \times (-7) + 2 \times 8 \\ 11 \times 3 + 0 \times 1 & 11 \times (-7) + 0 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 51 \\ 33 & -77 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{توضيح ل } n = 3 : c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + a_{i3} \times b_{3j}$$

مثال : لإيجاد المعامل $c_{23} = ?$ في الجداء التالي : نأخذ السطر 2 من المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & ? \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$



$$\boxed{?} = (-6 \ 4 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = -6 \times 2 + 4 \times 9 + 1 \times 8 = 32$$

الأولى و العمود رقم 3 من المصفوفة الثانية ومنه : $32 = -6 \times 2 + 4 \times 9 + 1 \times 8$

- للحصول على جميع معاملات المصفوفة $P = A \times B$ يتم بإجراء الجداء لكل سطر من المصفوفة الأول A بأعمدة المصفوفة الثانية B .
مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \boxed{?} & \dots \end{pmatrix}$$

✓ نتم الجداء السابق:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+77 & 4+63 \\ 6+55 & 8+45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 67 \\ 61 & 53 \end{pmatrix}$$

نحصل على

مثال:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \boxed{?} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

✓ نتم الجداء السابق:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+0+15 & 40+30+9 & 10+45+24 \\ 6+0+5 & 24+24+3 & 12+36+8 \\ 9+0+35 & 36+0+21 & 18+0+56 \end{pmatrix}$$

نحصل على

4. ملحوظة :

$n \in \{2, 3\}$ و 0_n المصفوفة المنعدمة و I_n المصفوفة الوحدة من مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة n لدينا :

أ- بعض مميزات المصفوفة المنعدمة 0_n .

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A + 0_n = A, \quad 0_n + A = A$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

✓ بالنسبة ل $n=2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ مثال :

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

✓ بالنسبة ل $n=3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

✓ مثال :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A 0_n = A, \quad 0_n A = 0_n$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓ بالنسبة ل $n=2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓ مثال :

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : n=3 \text{ بالنسبة لـ } \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{مثال } \checkmark$$

ب- بعض مميزات المصفوفة الواحدة I_n .

• لدينا : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A \times I_n = A, I_n \times A = A$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : n=2 \text{ بالنسبة لـ } \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} : \text{مثال } \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} : n=3 \text{ بالنسبة لـ } \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} : \text{مثال } \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{لدينا : } A \times 0_2 = 0_2 \times A = 0_2 \text{ أي } \checkmark$$

5. خاصيات :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A + B = B + A \text{ لدينا } \checkmark$$

6. ملحوظة :

• الضرب ليس بتبادلي دائما في المجموعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ لدينا : $AB \neq BA$

مثال مضاد :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

III. جزء مستقر - قانون مستخلص : Partie stable - Loi induite

1. تعريف :

لتكن (E, \perp) مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي \perp (anti truc) و S جزء غير فارغ من E (أي $S \subset E$ و $S \neq \emptyset$).

• S هو جزء مستقر في (E, \perp) يكافئ : $\forall (x, y) \in S^2 : x \perp y \in S$

• القانون التركيب الداخلي المعرف في S انطلاقا من القانون \perp يسمى قانون مستخلص ويرمز له كذلك بـ \perp .

2. أمثلة :

✓ مثال 1 :

لنعتبر جدول القانون التركيب الداخلي * في $E = \{0,1,2\}$. حيث : $a*b = a+b-ab$

1. تأكد بأن : $S = \{0,1\}$ مستقر في $(E,*)$.
2. تأكد بأن : $S = \{0,2\}$ مستقر في $(E,*)$.
3. هل $S = \{1,2\}$ مستقر في $(E,*)$ ؟

جواب :

1. نتأكد أن $S = \{0,1\}$ مستقر في $(E,*)$.

نعم $S = \{0,1\}$ مستقر في $(E,*)$ لدينا : القانون المستخلص في S حسب الجدول هو

جدول $(E,*)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

جدول $(E,*)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

الجدول أمامه يوضح ذلك :

جدول $(E,*)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

الجدول أمامه يوضح ذلك :

جدول $(E,*)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

جدول $(S,*)$

| | | |
|---|---|---|
| * | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

2. نتأكد أن $S = \{0,2\}$ مستقر في $(E,*)$.

نعم $S = \{0,2\}$ مستقر في $(E,*)$ القانون المستخلص في S حسب الجدول هو

جدول $(S,*)$

| | | |
|---|---|---|
| * | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 0 |

3. ندرس هل $S = \{1,2\}$ مستقر في $(E,*)$ ؟

حسب الجدول $S = \{1,2\}$ غير مستقر لأنه يوجد زوج $(2,2)$ من S^2 حيث :

$$2*2 = 0 \notin S$$

✓ مثال 2 :

المجموعة N مستقرة في $(Z,+)$ و $(Q,+)$ و $(R,+)$ و (Z,\times) و (Q,\times) و (R,\times) .

✓ مثال 3 :

المجموعة Z^- غير مستقرة في (Z,\times) و (Q,\times) و (R,\times) ولكن مستقرة في $(Z,+)$ و $(Q,+)$ و $(R,+)$.



✓ مثال 4 :

$$\mathcal{N}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / x \in \mathbb{R} \right\} \text{ المجموعة غير مستقرة في } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$$

$$\text{لأن : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$$

✓ مثال 5 :

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / x \in \mathbb{R} \right\} \text{ المجموعة مستقرة في } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$$

$$\text{ليكن : } \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ من } \mathcal{H}_2(\mathbb{R})$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xy \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbb{R}) \text{ لدينا :}$$

.IV خاصيات القوانين التركيب الداخلية :

A. التجمعية : L'associativité :

I. تعريف :

لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي \perp .القانون \perp تجمعي في E إذا وفقط إذا كان $\forall (a,b,c) \in E^3 : (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$.وفي هذه الحالة يمكن أن نكتب : $a \perp b \perp c$ بدل من $(a \perp b) \perp c$ أو $a \perp (b \perp c)$

2. أمثلة :

مثال 1 : سبق أن درسنا : الجمع و الضرب بأنهما قانونين تجمعيين في كل من $\mathbb{C} ; \mathbb{R} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{N}$.مثال 2 : سبق أن درسنا : الجمع بأنه قانون تجمعي في كل من المستوى المتجهي V_2 و في المستوى المتجهي V_3 .مثال 3 : الجمع بأنه قانون تجمعي في كل من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ و $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.مثال 4 : الجمع بأنه قانون تجمعي في $S_2(\mathbb{R})$ مجموعة المتتاليات العددية .مثال 5 : الجمع و الضرب قانونين تجمعيين في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3. خاصية :

• إذا كان القانون التركيب الداخلي \perp تجمعي في E فإنه تجمعي في كل جزء S مستقر في (E, \perp) .

• العكسي غير صحيح دائما .

B. التبادلية : La commutativité :

I. تعريف :

لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي \perp .القانون \perp تبادلي في E إذا وفقط إذا كان $\forall (a,b) \in E^2 : a \perp b = b \perp a$.

2. أمثلة :

• الأمثلة السابقة تبقى صحيحة بتعويض كلمة تجمعي ب كلمة تبادلي .

• نعلم أن الجداء المتجهي $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ قانون تركيب داخلي في الفضاء المتجهي V_3 . ولكن غي تبادلي في V_3 لأن $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

3. تمرين تطبيقي :

• نعتبر القانون التركيب الداخلي * في \mathbb{R} . حيث : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a * b = a + b - ab$.

1. هل القانون * تبادلي في \mathbb{R} ؟

2. هل القانون * تجمعي في \mathbb{R} ؟

3. هل القانون * مستقر في \mathbb{N} ؟

4. هل القانون * مستقر في \mathbb{Z} ؟

4. خاصية :

• إذا كان القانون التركيب الداخلي \perp تجمعي في E فإنه تجمعي في كل جزء S مستقر في (E, \perp) .

C. العنصر المحايد : *L'élément neutre*

1. تعريف :

• لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي \perp و e عنصر من E .

• نقول إن e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون \perp (أو عنصر محايد في (E, \perp)) إذا وفقط إذا كان :

$$\forall a \in E : a \perp e = a \text{ و } e \perp a = a$$

2. ملحوظة :

• إذا كان القانون تبادلي فإن أحدى المتساويتين تكفي .

3. أمثلة :

• مثال 1 : العدد صفر (0) عنصر محايد بالنسبة للجمع في كل من $\mathbb{C} ; \mathbb{R} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{N}$.

• مثال 2 : العدد واحد (1) عنصر محايد بالنسبة للضرب في كل من $\mathbb{C} ; \mathbb{R} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{N}$.

• مثال 3 : المتجهة المنعدمة $\vec{0}$ (في المستوى المتجهي V_2) عنصر محايد بالنسبة للجمع في المستوى المتجهي V_2 .

• مثال 4 : المتجهة المنعدمة $\vec{0}$ (في الفضاء المتجهي V_3) عنصر محايد بالنسبة للجمع في الفضاء المتجهي V_3 .

• مثال 5 : المصفوفة المنعدمة $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ عنصر محايد بالنسبة للجمع في $M_2(\mathbb{R})$ و $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ بالنسبة للضرب في $M_2(\mathbb{R})$

• مثال 6 : المصفوفة المنعدمة $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ عنصر محايد بالنسبة للجمع في $M_3(\mathbb{R})$ و $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

• مثال 7 : الصف $\vec{0}$ عنصر محايد بالنسبة للجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

• مثال 8 : الصف $\vec{1}$ عنصر محايد بالنسبة للضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

• مثال 9 : الإزاحة ذات المتجهة المنعدمة $\vec{0}$ (في المستوى المتجهي V_2) عنصر محايد بالنسبة للمركب إزاحتين في $E = \mathcal{F}(V_2)$

• مجموعة الإزاحات في المستوى المتجهي V_2 . (نعلم أن $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$) .

4. خاصية :

• إذا كان القانون التركيب الداخلي \perp في E يتوفر على عنصر محايد فإن هذا العنصر وحيد .

5. برهان :

نستدل على ذلك بالخلف :

نفترض هناك على الأقل عنصرين محايدين e و e' في (E, \perp) .• بما أن e : عنصر محايد إذن $e \perp e' = e'$ (1)• بما أن e' : عنصر محايد إذن $e \perp e' = e$ (2)حسب : (1) و (2) نحصل على $e = e'$

6. خاصية :

ليكن \perp قانون تركيب داخلي في E و e العنصر المحايد ل \perp و S جزء مستقر في (E, \perp) .إذا كان $e \in S$ فإن e هو العنصر المحايد في (S, \perp) .

D. مماثل عنصر : Symétrique d'un élément

1. تعريف :

ليكن \perp قانون تركيب داخلي في E و e العنصر المحايد ل \perp و a عنصر من E .عنصر a من E يقبل مماثلاً a' في (E, \perp) إذا وفقط إذا كان : $a' \perp a = e$ و $a \perp a' = e$

2. ملحوظة :

• إذا كان القانون تبادلي فإن أحدى المتساويتين تكفي .

• كذلك a' مماثلة a بالنسبة ل \perp إذن a و a' متماثلين بالنسبة ل \perp .• بالنسبة للقانون التركيبي + العنصر المحايد يرمز له ب: 0 أو θ أو $\vec{0}$ و للمماثل a ب $-a$ (مقابل) مثلاً للمماثل الدالة f ب $-f$ ؛ ل• \vec{u} ب $-\vec{u}$.• بالنسبة للقانون التركيبي \times العنصر المحايد يرمز له ب: 1 أو I_E أو I_n و للمماثل a ب a^{-1} (مقلوب) مثلاً للمماثل المصفوفة A ب A^{-1} .

3. أمثلة :

مثال 1 : بالنسبة للجمع : 0 هو العنصر الوحيد الذي له مماثل (أي مقابل) هو 0 في \mathbb{N} أما في \mathbb{Z} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{R} و \mathbb{C} كل الأعداد لها مماثل

(أي مقابل) .

مثال 2 : بالنسبة للضرب : 1 هو العنصر الوحيد الذي له مماثل (أي مقلوب) هو 1 في \mathbb{N} أما في \mathbb{Z} فقط 1 و -1 (مماثلتهما هما 1 و -1)(\mathbb{Q} ; \mathbb{R} و \mathbb{C} كل الأعداد لها مماثل (أي مقلوب) ما عدا الصفر ليس له مماثل (أي مقلوب) .مثال 3 : مماثل المتجهة \vec{u} في المستوى المتجهي V_2 هي $-\vec{u}$ بالنسبة للجمع في المستوى المتجهي V_2 .مثال 4 : مماثل المتجهة \vec{u} في الفضاء المتجهي V_3 هي $-\vec{u}$ بالنسبة للجمع في المستوى المتجهي V_3 .مثال 5 : مماثل المصفوفة (أي مقابل) $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ بالنسبة للجمع في $M_2(\mathbb{R})$ هي المصفوفة $-A = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$.مثال 6 : مماثل المصفوفة (أي مقلوب) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ بالنسبة للضرب في $M_2(\mathbb{R})$ هي المصفوفة $A' = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$ لأن : لدينا : $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-10 & -22+22 \\ 5-5 & -10+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-10 & 2-2 \\ -55+55 & -10+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : $AA^{-1} = I_2$ و $A^{-1}A = I_2$

مثال 7 : بالنسبة للجمع في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: مماثل (أي مقابل) الصنف $\bar{3}$ هو الصنف $\bar{4}$ (لأن $\bar{4} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{4} = \bar{0}$) أما بالنسبة للضرب

مماثل (أي مقابل) الصنف $\bar{3}$ هو الصنف $\bar{5}$ (لأن $\bar{3} \times \bar{5} = \bar{5} \times \bar{3} = \bar{15} = \bar{1}$) .

مثال 8 : بالنسبة للجمع في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: مماثل (أي مقابل) الصنف $\bar{3}$ هو الصنف $\bar{4}$ (لأن $\bar{4} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{4} = \bar{0}$) أما بالنسبة للضرب

مماثل (أي مقلوب) الصنف $\bar{3}$ هو الصنف $\bar{5}$ (لأن $\bar{3} \times \bar{5} = \bar{5} \times \bar{3} = \bar{15} = \bar{1}$) .

مثال 9 : مماثل $t_{\bar{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة \bar{u} (في المستوى المتجهي V_2) هي الإزاحة $t_{-\bar{u}}$ ذات المتجهة $-\bar{u}$ بالنسبة للمركب إزاحتين

في $E = \mathcal{T}(V_2)$ مجموعة الإزاحات في المستوى المتجهي V_2 . (نعلم أن $t_{\bar{u}} \circ t_{\bar{v}} = t_{\bar{u}+\bar{v}}$) .

4. خاصية :

إذا كان \perp قانون تركيب داخلي تجميعي في E و a من E يقبل مماثلا a' في (E, \perp) فإن المماثل a' وحيد .

5. برهان : نستدل على ذلك بالخلف :

نفترض هناك على الأقل عنصرين مماثلين و مختلفين a' و a'' ل a في (E, \perp) .

• بما أن a' مماثل ل a إذن $a \perp a' = e$ ومنه $a \perp a'' = e = a'' \perp a = a'' \perp a'$ (1) .

• بما أن a'' مماثل ل a إذن $a \perp a'' = e$ ومنه $a \perp a' = e = a' \perp a = a' \perp a''$ (2) .

حسب : (1) و (2) نحصل على $a'' = a'$. وهذا يناقض الافتراض .

خلاصة : $a'' = a'$

6. خاصية :

\perp قانون تركيب داخلي تجميعي في E .

إذا كان a' و b' مماثلين ل a و b على التوالي في (E, \perp) فإن العنصر $a \perp b$ من E له مماثل هو $b' \perp a'$ بالنسبة ل \perp .

7. برهان :

نتحقق بأن : $b' \perp a'$ هو مماثل $a \perp b$.

لدينا : $(a \perp b) \perp (b' \perp a') = a \perp b \perp b' \perp a' = a \perp (b \perp b') \perp a' = a \perp e \perp a' = a \perp a' = e$.

بنفس الطريقة نبيّن أن : $(b' \perp a') \perp (a \perp b) = e$

ومنه : $(b' \perp a') \perp (a \perp b) = e$ و $(a \perp b) \perp (b' \perp a') = e$.

خلاصة : $a \perp b$ من E له مماثل هو $b' \perp a'$ بالنسبة ل \perp

E عنصر منتظم : *Élément régulier*

1. تعريف :

ليكن \perp قانون تركيب داخلي في E عنصر من E .

$\left. \begin{aligned} (x \perp a = y \perp a) &\Rightarrow x = y \\ (a \perp x = a \perp y) &\Rightarrow x = y \end{aligned} \right\}$: لدينا E من y و x لكل إذا كان (E, \perp) إذا فقط إذا كان لكل x و y من E لدينا

2. ملحوظة :

إذا كان القانون تبادلي فإن أحد الاستلزامين يكفي .

3. أمثلة :

- بالنسبة للجمع في $\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{C}$ جميع الأعداد هي منتظمة .
- بالنسبة للضرب في $\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{C}$ جميع الأعداد هي منتظمة ماعدا 0 .
- في $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \times)$ لدينا : $4 \times 5 = 4 \times 1$ ولكن $5 \neq 1$ ولدينا كذلك : $4 \times 5 = 4 \times 3$ ولكن $5 \neq 3$.

4. خاصية :

⊥ قانون تركيب داخلي تجميعي في E .

إذا كان a يقبل مماثلا في (E, \perp) فإن العنصر a من E منتظم في (E, \perp) .

V. التشاكل L'homomorphisme

1. تعريف :

ليكن ⊥ قانون تركيب داخلي في E و * قانون تركيب داخلي في F و f تطبيق من E نحو F . (أي $f : (E, \perp) \rightarrow (F, *)$)

التطبيق f هو تشاكل من (E, \perp) إلى $(F, *)$ إذا وفقط إذا كان : $\forall x, y \in E : f(x \perp y) = f(x) * f(y)$

2. ملحوظة :

- إذا كان التطبيق f تقابلي فالتشاكل f يسمى تشاكل تقابلي من (E, \perp) إلى $(F, *)$. *isomorphisme de (E, \perp) vers $(F, *)$* .
- تشاكل أي يحول القانون ⊥ إلى القانون * .

3. أمثلة :

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \ln(x)$$

نعتبر $(E, \perp) = (]0, +\infty[, \times)$ و $(F, *) = (\mathbb{R}, +)$ و التطبيق

$$\forall x, y \in]0, +\infty[: \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\text{أي : } \forall x, y \in]0, +\infty[: f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

خلاصة : التطبيق f هو تشاكل من $]0, +\infty[$ إلى \mathbb{R} أو أيضا الدالة $f(x) = \ln(x)$ هي تشاكل من $]0, +\infty[$ إلى \mathbb{R} .

ملحوظة : الدالة $f(x) = \ln(x)$ هي تقابل من $]0, +\infty[$ إلى \mathbb{R} (لأنه متصل و تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$ إذن لها دلة عكسية)

إذن f تشاكل تقابلي من $]0, +\infty[$ إلى \mathbb{R} .

- نفس الشيء الدالة $f(x) = e^x$ هي تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ إلى $(]0, +\infty[, \times)$ وضح ذلك .

4. خاصيات :

خاصية 1 :

ليكن f تشاكل من (E, \perp) إلى $(F, *)$.

إذا كان S جزء مستقر من (E, \perp) فإن صورته S' ب f (أي $S' = f(S)$) مستقرة بالقانون المستخلص * .

5. برهان :

لهذا نبين لكل $x' \in S'$ و $y' \in S'$ من $S' = f(S)$ لدينا : $x' * y' \in S' = f(S)$.



بما أن x' و y' من $S' = f(S)$ إذن يوجد x و y من S حيث : $f(x) = x'$ و $f(y) = y'$.

نحسب $x' * y'$:

$$\text{لدينا : } x' * y' = f(x) * f(y)$$

$$= f(x \perp y)$$

ونعلم : $x \perp y \in S$ (لأن S مستقر) إذن $f(x \perp y) \in S'$ أي $x' * y' \in f(S) = S'$.

خلاصة : $S' = f(S)$ مستقر بالقانون المستخلص * .

6. ملحوظة :

$f(E)$ جزء مستقر في $(F, *)$.

خاصية 2 :

ليكن f تشاكل من (E, \perp) إلى $(F, *)$.

- إذا كان القانون \perp تبادلي في E فإن القانون المستخلص * تبادلي في $f(E)$.
- إذا كان القانون \perp تجمعي في E فإن القانون المستخلص * تجمعي في $f(E)$.
- إذا كان القانون \perp له عنصر محايد e في E فإن القانون المستخلص * له عنصر محايد هو $f(e)$ في $f(E)$.
- إذا كان a' مماثل a بالنسبة للقانون \perp فإن القانون $f(a')$ مماثل $f(a)$ بالنسبة للقانون المستخلص * في $f(E)$.
- إذا كان a منتظم بالنسبة للقانون \perp و f تشاكل تبايني فإن $f(a)$ منتظم بالنسبة للقانون المستخلص * في $f(E)$.

7. برهان :

لهذا نبين لكل x' و y' و z' من $f(E)$ لدينا : $(x' * y') * z' = x' * (y' * z')$

بما أن x' و y' و z' من $f(E)$ إذن يوجد x و y و z من E حيث : $f(x) = x'$ و $f(y) = y'$ و $f(z) = z'$

لدينا :

$$(x' * y') * z' = (f(x) * f(y)) * f(z)$$

$$= f(x \perp y) * f(z)$$

$$= f((x \perp y) \perp z)$$

$$= f(x \perp (y \perp z))$$

$$= f(x) * f(y \perp z)$$

$$= f(x) * (f(y) * f(z))$$

$$= x' * (y' * z')$$

ومنه : $(x' * y') * z' = x' * (y' * z')$

خلاصة : القانون المستخلص * تجمعي في $f(E)$.