

التمرين 1 :

نعتبر في \mathbb{R}^2 قانون التركيب الداخلي * المعرفة بما يلي :
لكل $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ و لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، نضع :

$$(a,b) * (x,y) = \left(\frac{ax+by}{2}, \frac{bx+ay}{2} \right)$$

1. بين أن * قانون تركيب داخلي في المجموعة E .

2. ليكن التطبيق φ المعرفة من \mathbb{R}^* نحو E بما يلي :

$$\forall m \in \mathbb{R}^* : \varphi(m) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$$

أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E, *)$.

ب- استنتج أن $(E, *)$ زمرة تبادلية محددًا عنصرها المحايد ومماثل

كل عنصر $\left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$ حيث $m \in \mathbb{R}^*$

3. نعتبر المجموعة :

$$F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2 - 4 \right\}$$

أ- بين أن :

$$F = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0 \right\}$$

ب- بين أن $(F, *)$ زمرة جزئية من $(E, *)$.

التمرين 2 :

لتكن G مجموعة مصفوفات $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل

$$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \text{ حيث } M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.

1. بين أن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2. بين أن (G, \times) زمرة. هل هذه الزمرة تبادلية ؟

3. لتكن H مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث

$$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ . بين أن } H \text{ زمرة جزئية للزمرة } (G, \times)$$

4. ليكن A عنصرا من G حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ مع $a \in \mathbb{R}$

نضع : $A^1 = A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$ لكل n من \mathbb{N}^* .
أحسب A^n بدلالة a و n حيث n عدد صحيح طبيعي غير

منعدم.

11. نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي T المعرفة بما يلي :
لكل $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ و لكل $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ، نضع :

$$(a,b) T (x,y) = (a+bx, by)$$

وليكن φ التطبيق المعرفة من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* , \varphi \left(M_{(a,b)} \right) = (a,b)$$

1. بين أن φ تشاكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.

2. استنتج بنية $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.

3. حدد مماثل $\underbrace{(a,1) T (a,1) T \dots T (a,1)}_n$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$

حيث $a \in \mathbb{R}$ و n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

التمرين 3 :

1. لتكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ لكل (a,b) من E^2 ، نضع :

$$a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$$

1. أ- تحقق من أن لكل (a,b) من E^2 ، لدينا :

$$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$$

ب- استنتج أن \perp قانون تركيب داخلي في E .

2. بين أن (E, \perp) زمرة تبادلية.

11. تذكر: $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \text{ حلقة واحدة وحدتها } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$$

$$\checkmark \text{ فضاء متجهي حقيقي. } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

لتكن \mathcal{S} مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل

$$a \in E \text{ حيث } M_{(a)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$$

$$\text{ نضع : } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. أ- تحقق من أن : $A^2 = -2A$

وأن : $M_{(a)} = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. استنتج أن A قابلة للقلب في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ وحدد A^{-1} .

3. أحسب A^2 بدلالة A و I .

4. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : A^n = u_n \cdot A + v_n \cdot I$

حيث: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليتان

عدديتان معرفتان بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 & \text{و} & v_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + v_n & ; & n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = 3u_n & ; & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5. نضع: $w_n = u_n + v_n$ لكل n من \mathbb{N} .

أحسب w_{n+1} بدلالة w_n ، ثم استنتج w_n بدلالة n .

6. استنتج u_{n+1} بدلالة u_n .

7. حدد u_n بدلالة n ، ثم v_n بدلالة n .

8. أحسب A^n بدلالة n .

التسعين : 7

نعتبر المجموعة:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad / \\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = A(x) \cos x + B(x) \sin x \end{array} \right\}$$

حيث A و B حدوديتان درجتها أصغر من أو تساوي 1.

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2. نعتبر الأسرة $B = (f_1, f_2, f_3)$ حيث:

$$f_2(x) = \sin x \quad \text{و} \quad f_1(x) = \cos x$$

$$f_3(x) = x \cos x \quad \text{و}$$

بين أن B أساس للفضاء $(E, +, \cdot)$.

3. ليكن $a \in \mathbb{R}$. نعتبر الدالتين g و h بحيث:

$$\begin{cases} g(x) = \cos(a+x) \\ h(x) = \sin(a+x) \end{cases}$$

أ- تأكد من أن $(h, g) \in E^2$ ثم حدد إحداثيات g و h

بالنسبة للأساس B .

ب- هل الأسرة $B' = (g, h, f_3, f_4)$ أساس ل $(E, +, \cdot)$ ؟

f_4 هي الدالة المعرفة بما يلي: $f_4(x) = x \sin x$.

ب- بين أن \mathcal{F} جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2. نعتبر التطبيق: $\varphi : (E, \perp) \rightarrow (\mathcal{F}, \times)$

$$a \mapsto \varphi(a) = M_{(a)}$$

أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من (E, \perp) نحو (\mathcal{F}, \times) .

ب- استنتج بنية (\mathcal{F}, \times) .

التسعين : 4

$(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*), +, \cdot)$ هو الفضاء المتجهي الحقيقي لمجموعة الدوال

العددية المعرفة على \mathbb{R}_+^* .

لكل $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ولكل x من \mathbb{R}_+^* ، نضع:

$$\varphi_{(a,b)}(x) = \ln \left(f_{(a,b)}(x) \right) \quad \text{و} \quad f_{(a,b)}(x) = x^a e^{bx}$$

ولتكن المجموعة: $\mathcal{L} = \left\{ \varphi_{(a,b)} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. بين أن $(\mathcal{L}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*), +)$.

2. أ- استنتج أنه لكل $\varphi_{(a,b)}$ من \mathcal{L} ولكل λ من \mathbb{R} ، لدينا:

$$\lambda \varphi_{(a,b)} \in \mathcal{L}$$

ب- استنتج أن $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

ج- بين أن $(\varphi_{(1,0)}, \varphi_{(0,1)})$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{L}, +, \cdot)$

ثم حدد بعده.

التسعين : 5

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0 \right\}$$

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2. ليكن $e_1 = (1, 1, 0)$ و $e_2 = (0, 2, 1)$.

أ- بين أن الأسرة (e_1, e_2) مولدة للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$.

ب- بين أن الأسرة (e_1, e_2) حرة؛ ثم استنتج $\dim E$.

التسعين : 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{في} \quad \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. تحقق من أن: $(A + 3I) \times (A - I) = O$ حيث:

التمرين 8 :

لتكن \mathcal{M} مجموعة المصفوفات M من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث :

$$2M^2 - 3M + I_2 = O_2$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{حيث :}$$

1. لتكن M مصفوفة من \mathcal{M} .

$$\text{نضع : } E = 2(I_2 - M) \quad \text{و} \quad F = 2M - I_2$$

أ- بين أن : $E \times F = O_2$.

ب- بين أن : $F^2 = F$ و $E^2 = E$.

ج- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : M^n = \frac{1}{2^n} E + F$.

2. نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 1 \\ x_{n+1} = 3x_n - 10y_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{3}{2}y_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{يلي :}$$

أ- بين أن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ تنتمي إلى \mathcal{M} .

$$\text{ب- نضع : } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : X_{n+1} = A \cdot X_n$.

ج- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : X_n = A^n \cdot X_0$.

د- حدد تعبير x_n و y_n بدلالة n .

هـ- أدرس تقارب المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

التمرين 9 :