الأعداد العقدية

1. تقديم و تعاريف :

- توجد مجموعة يرمز لها ب $\mathbb{C}$ و تسمى مجموعة الأعداد العقدية و تحقق $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
و هي تحتوي على عدد نرمز له ب i حيث $i^2 = -1$
- كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب على شكل $z = a + ib$ مع $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له ب $\Re e(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي و نرمز له ب $\mathrm{Im}(z)$
- الكتابة $z = a + ib$ مع $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z
- إذا كان $z = ib$ حيث $b \in \mathbb{R}$ نقول أن z تخيلي صرف و نكتب $z \in i\mathbb{R}$

2. خاصيات :

ليكن $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ لدينا :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) = 0 \end{cases}$

العمليات في $\mathbb{C}$

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $-z = -a - ib$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- جميع خصائص الجداء و الجمع في $\mathbb{R}$ تبقى صالحة في $\mathbb{C}$
- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

- $(a-ib)^2=a^2-b^2-2abi$
- $(a-ib)(a+ib)=a^2+b^2$

3. مرافق عدد عقدي

تعريف :

مرافق العدد العقدي $z=a+ib$ **مع** $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ **هو العدد العقدي** $\overline{z}=a-ib$

خاصيات المرافق

ليكن z_1 **و** z_2 **عددين عقديين**

- ✓ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- ✓ $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
- ✓ $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}=\frac{1}{\overline{z_1}}$ $(z_1\neq 0)$
- ✓ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- ✓ $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ **حيث** $n\in\mathbb{Z}$ **و** $z\in\mathbb{C}$

نتائج :

- $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\overline{z}$

4. معيار عدد عقدي :

معيار العدد العقدي $z=a+ib$ **مع** $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ **هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب :** $|z|$ **و هو معرف بما يلي :**

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

خاصيات :

ليكن z **و** z' **عددين عقديين**

- ✓ $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}$
- ✓ $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
- ✓ $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ $(z\neq 0)$

- ✓ $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|} \quad (z'\neq 0)$
- ✓ $|z^n|=|z|^n$ حيث $n\in\mathbb{Z}$
- ✓ $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

5. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

أ. عمدة عدد عقدي غير منعدم :

ليكن $z=x+iy$ من $\mathbb{C}^*$ حيث x و y من $\mathbb{R}$

كل عدد حقيقي θ بحيث : $\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta=\dfrac{y}{|z|} \end{cases}$ يسمى عمدة ل z و نكتب : $\arg(z)=\theta+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

أو $\arg(z)\equiv\theta[2\pi] \quad (k\in\mathbb{Z})$

ب. خاصيات العمدة:

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

- ✓ $\arg(\overline{z_1})\equiv-\arg(z_1)[2\pi]$
- ✓ $\arg(z_1\times z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)[2\pi]$
- ✓ $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right)\equiv-\arg(z_1)[2\pi]$
- ✓ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)[2\pi]$
- ✓ $\arg(z_1^n)\equiv n\arg(z_1)[2\pi]$ حيث $n\in\mathbb{Z}$

6. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف :

كل عدد عقدي z غير منعدم يكتب على شكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

خاصيات الشكل المثلثي :

- $\overline{r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))} = r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $r(\cos\theta+i\sin\theta)\times r'(\cos\theta'+i\sin\theta') = rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$
- $\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $\dfrac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r'(\cos\theta'+i\sin\theta')} = \dfrac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta'))$
- $(r(\cos\theta+i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ **(علاقة موافر)**

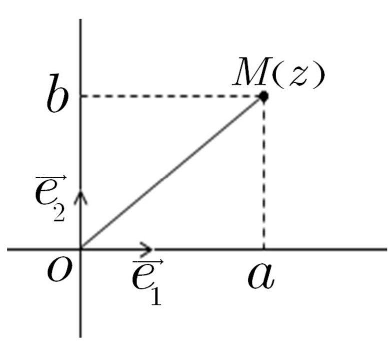
7. تأويلات هندسية للأعداد العقدية :

تعاريف:

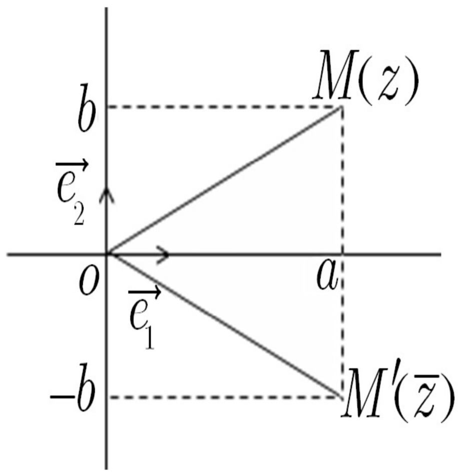
في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$

لتكن النقطة $M(a,b)$

- العدد العقدي $z = a+ib$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى لحق النقطة M
- النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة العدد $z = a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

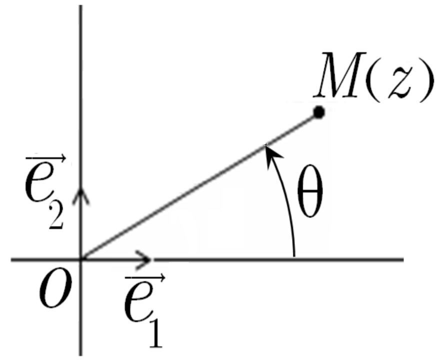


- مرافق $z=a+ib$ هو $\overline{z}=a-ib$

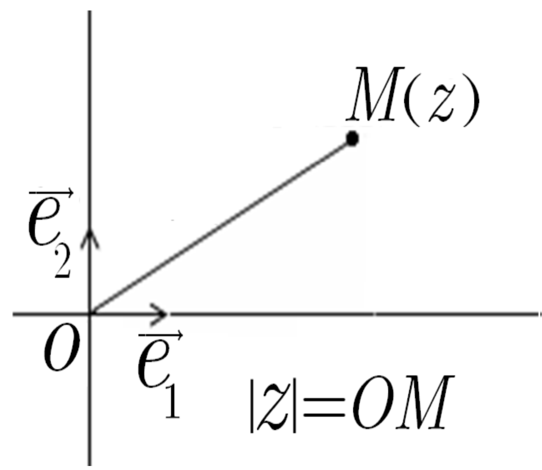


- لدينا كذلك $z=a+ib$ هو لحق المتجهة $\overrightarrow{U}(a,b)$
- المستوى (P) يسمى المستوى العقدي
- $(O,\overrightarrow{e_1})$ يسمى المحور الحقيقي
- $(O,\overrightarrow{e_2})$ يسمى المحور التخيلي
- $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}$ و نكتب $z_M=a+ib$ أو $aff(M)=a+ib$

❖ ليكن $z=a+ib$ لحق النقطة M من المستوى العقدي لدينا : $\arg(z)\equiv\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$



❖ المسافة OM : $OM=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$



المسافة AB :
لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B
لدينا : $AB=|z_B-z_A|$

خاصيات :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من المستوى العقدي (P) :

- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $z_B - z_A$
- لحق المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$ هو : $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هو : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- M نقطة لدينا :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow z_M = z_A + z_B$$
$$\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_M = \alpha . z_A$$

- لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقط مختلفة مثنى مثنى
  - A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
  - $(AB)//(DC) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
    $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$
  - $(AB)\perp(DC) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
    $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
  - النقط A و B و C و D متداورة $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

قياس الزوايا :

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$

- $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(z_A)[2\pi]$ حيث $O \neq A$
- $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ حيث $A \neq B$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$ حيث $A \neq B$ و $A \neq C$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
  حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

8. الشكل الأسي لعدد عقدي :

تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم يكتب على شكله الأسي ب: $z = re^{i\theta}$
حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

خاصيات :

- ✓ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- ✓ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- ✓ $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- ✓ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- ✓ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- ✓ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

صيغ أولير

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

9. الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم

❖ ليكن Z من $\mathbb{C}$ و n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

نسمي الجذر النوني للعدد Z أو الجذر من الرتبة n للعدد Z كل عدد عقدي z يحقق $z^n = Z$

❖ ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r>0)$

العدد Z يقبل n جذر نوني و هذه الجذور النونية تكتب على شكل : $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ بحيث $k \in \{0,1,2,........,n-1\}$

❖ صور الجذور النونية للعدد Z تكون مضلعا منتظما ذو n ضلع محاطا بالدائرة التي مركزها O وشعاعها $\sqrt[n]{r}$

❖ الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد : $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ بحيث $k \in \{0,1,2,........,n-1\}$ و تسمى الجذور من الرتبة n للوحدة

❖ ليكن Z من $\mathbb{C}^*$ و a أحد الجذور النونية للعدد Z
نحصل على الجذور النونية للعدد Z بضرب a في الجذور النونية للوحدة

10. الجذور المربعة لعدد عقدي غير منعدم

أ. الطريقة المثلثية :

ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r>0)$

الجذران المربعان للعدد Z هما : $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

ب. الطريقة الجبرية :

1) إذا كان $Z \in \mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{Z}$ و $-\sqrt{Z}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

2) إذا كان $Z \in \mathbb{R}_-^*$: $i\sqrt{-Z}$ و $-i\sqrt{-Z}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

3) إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_+^*$ $\left(b \in \mathbb{R}_+^*\right)$ $Z = ib$: $(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

4) إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_-^*$ $\left(b \in \mathbb{R}_-^*\right)$ $Z = ib$: $(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

5) إذا كان $Z = a+ib$ ($a \neq 0$ و $b \neq 0$) :

❖ إذا كان $b>0$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

و $$-\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

هما الجذران المربعان للعدد Z

❖ إذا كان $b<0$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

و $$-\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

هما الجذران المربعان للعدد Z

11. المعادلات من الدرجة الثانية :

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$

حل المعادلة $az^2+bz+c=0$

$\downarrow$

$\Delta=b^2-4ac$

- **إذا كان** $\Delta=0$:

فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : $z=\dfrac{-b}{2a}$

- إذا كان $\Delta\neq 0$:

فإن Δ يقبل جذرين مربعين هما μ و $-\mu$ و يكون للمعادلة حلين هما :

$z=\dfrac{-b-\mu}{2a}$ أو $z=\dfrac{-b+\mu}{2a}$

ملاحظة : **إذا كان** z_1 و z_2 هما حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ فإن :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

12. التحويلات الإعتيادية :

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

- **الكتابة العقدية للإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ هي :** $z' = z + z_{\vec{u}}$
- **الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k هي :** $z' - \omega = k(z - \omega)$
- **الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته θ هي :** $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

نعتبر التطبيق : $\begin{array}{rccc} f: & P & \mapsto & P \\ & M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$ حيث $z' = az + b$

- إذاكان $a = 1$:

فإن f إزاحة متجهتها $\vec{u}$ ذات اللحق b

- إذا كان $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$:

فإن f تحاكي مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و نسبته a

(Ω هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $f(\Omega) = \Omega$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة $z = az + b$)

- إذاكان $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ حيث $|a| = 1$:

فإن f دوران مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

(Ω هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $f(\Omega) = \Omega$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة $z = az + b$)

- إذاكان $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ حيث $|a| \neq 1$:

فإن $f = h \circ r$

حيث : h هو التحاكي الذي مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و نسبته $|a|$

و r هو الدوران مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

ملاحظات :

- إذا كان r دوران مركزه Ω و زاويته θ فإن r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r له نفس المركز و زاويته $-\theta$
- التحاكي الذي نسبته -1 هو تماثل مركزي