I. المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$.

01. حل المعادلة : $z\in\mathbb{C}/z^2=a$ مع a عدد حقيقي

❖ نشاط:

أ – حل المعادلة: $z\in\mathbb{C}/z^2=0$. ب – حل المعادلة: $z\in\mathbb{C}/z^2=2$. ج – حل المعادلة: $z\in\mathbb{C}/z^2=-2$.

د – أعط الخاصية:

❖ خاصية:

ليكن a من $\mathbb{R}$.مجموعة حلول المعادلة: $z\in\mathbb{C}/z^2=a$ هي:

- $S=\{0\}$ إذا كان: $a=0$
- $S=\{\sqrt{a},-\sqrt{a}\}$ إذا كان: $a>0$
- $S=\{i\sqrt{-a},-i\sqrt{-a}\}$ إذا كان: $a<0$

02. المعادلة $z\in\mathbb{C}/az^2+bz+c=0$ مع a و b و c من $\mathbb{C}$ (معاملاتها أعداد عقدية) مع $a\neq 0$.

A. الجذرين المربعين لعدد عقدي :

❖ تعريف :

نقول إن عدد عقدي z جذر مربع لعدد عقدي Z لنعني أن $z^2=Z$.

❖ أمثلة :

1. العدد العقدي : $Z=0$ له جذر مربع وحيد هو $z=0$ لأن : $0^2=Z$.
2. العدد العقدي : $Z=1$ له جذرين مربعين هما $z_1=1$ و $z_2=-1$ لأن: $1^2=Z$ و $(-1)^2=Z$.
3. العدد العقدي : $Z=-1$ له جذرين مربعين هما $z_1=i$ و $z_2=-i$ لأن : $i^2=Z$ و $(-i)^2=Z$.
4. العدد العقدي : $Z=5$ له جذرين مربعين هما $z_1=\sqrt{5}$ و $z_2=-\sqrt{5}$ لأن : $\sqrt{5}^2=Z$ و $\left(-\sqrt{5}\right)^2=Z$.
5. العدد العقدي : $Z=-5$ له جذرين مربعين هما $z_1=i\sqrt{5}$ و $z_2=-i\sqrt{5}$ لأن : $\left(i\sqrt{5}\right)^2=Z$ و $\left(-i\sqrt{5}\right)^2=Z$.

❖ تحديد الجذرين المربعين لعدد عقدي على شكل : $Z=a+bi$ حيث a و b من $\mathbb{R}$.

لهذا نضع : $\delta=x+yi$ مع x و y من $\mathbb{R}$ و $\delta^2=Z$ (1) .

ومنه :

$$(1)\Leftrightarrow(x+yi)^2=a+bi\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=a+bi\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xyi=bi\\\left|(x+yi)^2\right|=|a+bi|\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\\x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$$

لكي نواصل حل النظمة يجب الانتباه لإشارة b (حالة $b>0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة . حالة $b<0$ إذن x و y لهما إشارة مختلفة).

مثال : تحديد الجذرين المربعين لعدد عقدي: $Z=-8+6i$.

نعتبر $\delta=x+yi$ مع x و y من $\mathbb{R}$ حيث $\delta^2=-8+6i$ (1) .

$$(1)\Leftrightarrow(x+yi)^2=-8+6i$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-8+6i$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-8\\2xy=6\\|x+yi|=|-8+6i|\\xy>0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-8\\2xy=6\\x^2+y^2=10\\xy>0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x^2=1 \text{ و } y^2=9 \text{ و } xy=3 \text{ و } xy>0$$
$$\Leftrightarrow(x=1 \text{ و } y=3) \text{ أو } (x=-1 \text{ و } y=-3)$$
$$\Leftrightarrow\delta=1+3i \text{ أو } \delta=-1-3i$$

خلاصة : الجذرين المربعين ل $Z=-8+6i$ هما $\delta_1=-1-3i$ و $\delta_2=-1-3i=-\delta_1$.

B. حل المعادلة $z\in\mathbb{C}/az^2+bz+c=0$ مع a و b و c من $\mathbb{C}$ (معاملاتها أعداد عقدية) مع $a\neq0$.

❖ نشاط:

1) لنعتبر المعادلة: $(F):z\in\mathbb{C}/az^2+bz+c=0$

أ- أحسب: $P=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$. ب – أكتب : (F) بدلالة P و $\Delta=b^2-4ac$ (أو أعط الشكل القانوني ل az^2+bz+c)

2) نضع δ جذر مربع ل Δ استنتج حلول المعادلة (F).أعط الخاصية:

01. خاصية و تعريف:

لنعتبر المعادلة: $(E):z\in\mathbb{C}/az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c من $\mathbb{C}$ (معاملاتها أعداد عقدية) مع $a\neq0$.

- المعادلة (E) تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول z في $\mathbb{C}$ معاملاتها الأعداد العقدية a و b و c مع $a\neq0$
- العدد العقدي $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز المعادلة (E) و نضع δ جذر مربع ل Δ .
- إذا كان $\Delta=0$: المعادلة (E) تقبل حلا عقديا مزدوج هو $z_1=\frac{-b}{2a}$
- إذا كان $\Delta\neq0$: المعادلة (E) تقبل حلين عقدين مختلفين هما: $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$.

02. ملحوظة :

- تعميل ل: az^2+bz+c هو : $\Delta\neq0$: $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$. $\Delta=0$: $az^2+bz+c=a(z-z_1)^2$
- لدينا: $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ و $z_1\times z_2=\frac{c}{a}$.

- لتحديد عددين عقديين z_1 و z_2 حيث $z_1+z_2=S$ و $z_1\times z_2=P$ (S و P معلومين) نحل المعادلة $(E): z\in\mathbb{C} / z^2-Sz+P=0$.

02. أمثلة :

مثال 1 :

لنعتبر المعادلة التالية: $(E): z\in\mathbb{C} / z^2+z+1=0$

1) نحسب : Δ المميز للمعادلة (E):

لدينا : $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$

2) حلي المعادلة هما :

$z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ملحوظة :

- الحل z_1 نرمز له ب: $z_1=j$ أما z_2 ب $z_2=\bar{j}$.
- لدينا الشكل المثلثي : $z_1=j=\left[1,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ و $z_2=\bar{j}=\left[1,-\dfrac{2\pi}{3}\right]$.
- لدينا العلاقات التالية : $j^2=\bar{j}$ و $j^3=1$ و $j^3+j^2+1=0$.

مثال 2 :

لنعتبر المعادلة التالية: $(E): z\in\mathbb{C} / z^2+(1-i)z+2-2i=0$

1) نحسب : Δ المميز للمعادلة (E):

لدينا : $\Delta=(1-i)^2-4\times1\times(2-2i)=-3=-8+6i=(1+3i)^2$ (حسب مثال سابق) .

2) حلي المعادلة هما :

$z_1=\dfrac{-1+i+(1+3i)}{2}=2i$ و $z_2=\dfrac{-1+i-(1+3i)}{2}=-1-i$.

II. الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم:

01. تعريف و خاصية :

كل عدد عقدي z غير منعدم حيث: $z=[r,\alpha]=\left[|z|,\arg z\right]$

نكتبه على شكل: $z=[r,\alpha]=re^{i\alpha}$ وتسمى الشكل الأسي للعدد z إذن: $z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=re^{i\alpha}$

وهذه الكتابة تحقق ما يلي: لكل α و β من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{Z}$

$e^{i\alpha}\times e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$; $\dfrac{1}{e^{i\beta}}=e^{-i\beta}$; $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}=e^{i(\alpha-\beta)}$; $\left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha}$.

02. مثال:

أعط الشكل الأسي للأعداد العقدية التالية:

- $z_1=2$; $z_2=-2$; $z_3=2i$; $z_4=-2i$.

جواب : $z_1=2=2e^{0i}$; $z_2=-2=2e^{i\pi}$; $z_3=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_4=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

- $z_1=1+i$; $z_2=1-i$; $z_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

جواب : $z_1=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

03. صيغتا أولير: FORMULES D' EULER

ليكن α من $\mathbb{R}$. z عدد عقدي معياره 1 و عمدته α إذن : $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$ ومنه نستنتج أن:

$$\left.\begin{array}{l} z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha} \\ \overline{z}=\cos\alpha-i\sin\alpha=e^{-i\alpha}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z+\overline{z}=2\cos\alpha=e^{i\alpha}+e^{-i\alpha} \\ z-\overline{z}=2i\sin\alpha=e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha=\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin\alpha=\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\end{array}\right.$$

❖ صيغتا أولير

ليكن α من $\mathbb{R}$ و $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$

$\cos\alpha=\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ و $\sin\alpha=\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$. كل صيغة تسمى صيغة أولير

04. ملحوظة:

حسب صيغة موافر

$$z^n=[1,\alpha]^n=\left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha}=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

$$\left(\overline{z}\right)^n=[1,-\alpha]^n=\left(e^{-i\alpha}\right)^n=e^{-in\alpha}=\cos n\alpha-i\sin n\alpha$$

$$z^n+\left(\overline{z}\right)^n=2\cos n\alpha$$

$$z^n-\left(\overline{z}\right)^n=2i\sin n\alpha$$

$$z^n\times\left(\overline{z}\right)^n=\left(z\times\overline{z}\right)^n=\left(1^2\right)^n=1$$

05. صيغ :

$z^n+\left(\overline{z}\right)^n=2\cos n\alpha$ و $z^n-\left(\overline{z}\right)^n=2i\sin n\alpha$ و $z^n\times\left(\overline{z}\right)^n=1$

أو أيضا : $e^{inx}+e^{-inx}=2\cos n\alpha$ و $e^{inx}-e^{-inx}=2i\sin n\alpha$ و $e^{inx}\times e^{-inx}=1$

06. تطبيق: الإخطاط :

إخطاط ل: $\cos^3 x$

لدينا: $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$. حسب صيغة أولير:

$$\cos^3 x=\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^3=\frac{1}{2^3}\left(z+\overline{z}\right)^3=\frac{1}{8}\left(z^3+3z^2\overline{z}+3z\left(\overline{z}\right)^2+\left(\overline{z}\right)^3\right)=\frac{1}{8}\left(z^3+\left(\overline{z}\right)^3+3z\overline{z}\times\left(z+\overline{z}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos 3x+3\times1\times2\cos x\right)=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$$

خلاصة: $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$.

ملحوظة : يمكننا استعمال : $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$

إخطاط ل $\sin^4 x$:

لدينا: $z=\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$. حسب صيغة أولير:

$$\sin^3 x = \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^4$$

$$= \frac{1}{(2i)^4}\left(z-\bar{z}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(z^4+4z^3\bar{z}+6z^2\left(\bar{z}\right)^2+4z\left(\bar{z}\right)^3+\left(\bar{z}\right)^4\right) = \frac{1}{16}\left(z^4+\left(\bar{z}\right)^4+4z\bar{z}\times\left(z^2+\left(\bar{z}\right)^2\right)+6\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x+4\times1\times2\cos 2x+6\right) = \frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}$$

خلاصة: $\sin^4 x == \frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}$

ملحوظة : يمكننا استعمال : $\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}\right)^4$

III. الجذور من الرتبة n لعدد عقدي

A. الجذور من الرتبة n :

01. تعريف :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و Z عدد عقدي معلوم غير منعدم .

- نقول إن عدد عقدي z هو جذر من الرتبة n ل Z لنعني أن $z^n = Z$.
- حالة خاصة : $Z=1$ في هذه الحالة $z^n=1$ ؛ z يسمى جذر من الرتبة n للوحدة (أو أيضا جذر نوني للوحدة) و نرمز له ب u .

02. أمثلة :

مثال1 : لدينا : $(1+i)^8 = 16$ إذن $z_1 = 1+i$ جذر من الرتبة 8 ل 16 . و كذلك $z_2=-1-i$ و أيضا $z_3 = 1-i$ ....

مثال2 : لدينا : $(i)^4=1$ إذن $z_1 = i$ جذر من الرتبة 4 ل 1 . و كذلك $z_2=-i$ و أيضا $z_3=1$ و أيضا $z_3=-1$.

03. ملحوظة :

- هناك جذر واحد من الرتبة n ل $Z=0$ هو $z=0$.
- نرمز لمجموعة الجذور من الرتبة n للوحدة ب : $\mathcal{U}_n$.
- $\mathcal{U}_n \neq \varnothing$ (لأن $1\in\mathcal{U}_n$) .
- $z\in\mathcal{U}_n \Rightarrow |z|=1$. (بما أن : $z\in\mathcal{U}_n$ فإن $z^n=1$ إذن $|z^n|=1$ أي $|z|^n=1$ ومنه $|z|=1$) .
- $z\in\mathcal{U}_n$ و $z'\in\mathcal{U}_n \Rightarrow z\times z'\in\mathcal{U}_n$ و $\frac{1}{z}\in\mathcal{U}_n$ و $\frac{z}{z'}\in\mathcal{U}_n$.

A. الجذور من الرتبة n للوحدة :

01. خاصية : (حلول المعادلة $z \in \mathbb{C} \ : z^n = 1$ (أي مجموعة الجذور من الرتبة n للوحدة) .

المعادلة $z \in \mathbb{C} \ : z^n = 1$ لها n حل (n جذر) وهي على شكل $u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ مع $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$.

02. برهان :

نحل المعادلة : $z \in \mathbb{C} \ : z^n = 1 \ (E)$.

بما أن :

$$z^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$$
$$\Rightarrow z = \cos\theta + i\sin\theta \ ; \theta \in \mathbb{R}$$

من جهة أخرى :

$$(E) \Leftrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = 1$$
$$\Leftrightarrow [1,\theta]^n = [1,0]$$
$$\Leftrightarrow [1,n\theta] = [1,0]$$
$$\Leftrightarrow n\theta \equiv 0 \ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow n\theta = 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \ , k \in \mathbb{Z}$$

و بالتالي :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \ ; \theta \in \mathbb{R}$$
$$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

نضع : $u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{\frac{2k\pi}{n}} \ ; \ k \in \mathbb{Z}$.

لدينا : لكل k من $\mathbb{Z}$

$$u_{k+n} = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = u_k$$

إذن : $u_{k+n} = u_k$ و منه $u_n = u_0$ و $u_{n+1} = u_1$ ....إذن حلول المعادلة هي فقط : u_0 و u_1 إلى u_{n-1} .

مجموعة حلول المعادلة $z \in \mathbb{C} \ : z^n = 1$ هي $\mathcal{U}_n = \{u_0, u_1, ..., u_{n-1}\}$.

ليكن u_k و $u_{k'}$ من $\mathcal{U}_n$ حيث $u_k = u_{k'}$ إذن : $\left[1, \frac{2k\pi}{n}\right] = \left[1, \frac{2k'\pi}{n}\right]$ ومنه $\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} \ [2\pi]$ أي $\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2k''\pi$

ومنه : $k - k' = nk''$ ومنه : $|k - k'| = n|k''| \ (1)$.

حالة 1 : $k'' = 0$ إذن $k = k'$.

حالة 2 : $k'' \neq 0$ إذن $|k''| \geq 1$ (لأن $k'' \in \mathbb{Z}$) . ومنه $n|k''| \geq n \ : (2)$

من جهة أخرى : $0 \leq k < n$ و $0 \leq k' < n$ ومنه $-n \leq k - k' < n$ و بالتالي $|k - k'| < n \ : \ (3)$.

حسب : (2) و (3) نحصل على $|k - k'| < n \leq n|k|$ ومنه $|k - k'| < n|k| \ : \ (4)$ و هي تناقض العلاقة (1) إذن $k'' = 0$

ومنه $k=k'$ أي عنصر لا يتكرر في $\mathcal{U}_n=\{u_0,u_1,....,u_{n-1}\}$.

خلاصة : $\mathcal{U}_n=\{u_0,u_1,....,u_{n-1}\}$ تحتوي على n عنصر بالضبط.

03. أمثلة :

- الجذور الثالثة للوحدة هي : 1 و $j=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]$ و $\bar{j}=j^2$.
- الجذور الرابعة للوحدة هي : 1 و -1 و i و $-i$.

04. ملحوظة :

- $u_k=(u_1)^k$, $k\in\mathbb{Z}$.
- $\sum_{k=0}^{k=n-1}u_k=u_0+u_1+.........u_{n-1}=0$ لأن : $u_0+u_1+.........u_{n-1}=(u_1)^0+(u_1)^1+....(u_1)^{n-1}=\frac{1-(u_1)^n}{1-u_1}=0$ مع العلم أن $(u_1)^n=u_1$.

B. صور الجذور النونية للوحدة مع $n\geq 3$:

01. بحث :

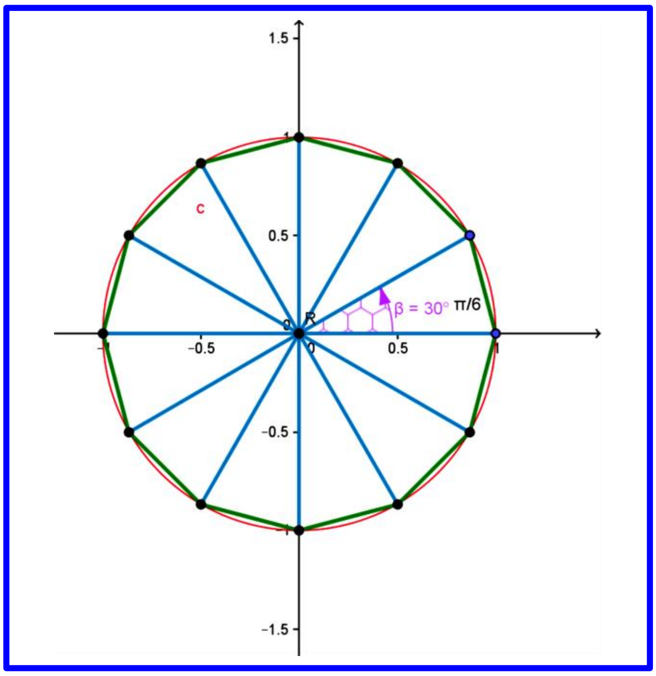
المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ نضع : $u_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=e^{\frac{2k\pi}{n}}$ مع $k\in$ 0,n−1 و $u_k\mapsto M_k$ (أي صورة u_k هي النقطة M_k أو أيضا لحق النقطة M_k هو u_k) نعتبر الدائرة المثلثية $(\mathcal{C})$ المرتبطة بهذا لمعلم. لدينا:

- $M_k\in(\mathcal{C})$ (لأن $OM=|u_k|=1$) .
- $\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\equiv\frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$.

(لأن
$$\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\equiv\arg\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv\arg(u_{k+1})-\arg(u_k)\ [2\pi]$$
$$\equiv\frac{2(k+1)\pi}{n}-\frac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$$
$$\equiv\frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$$
) .

(هذه الزوايا لها قياسات ثابتة)

ومنه الخاصية :



02. خاصية :

- صور الجذور من الرتبة n للوحدة هي رؤوس مضلع منتظم له n ضلع و محاط بالدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.
- مجموع الجذور من الرتبة n لعدد عقدي غير منعدم Z (أي $\sum_{k=0}^{k=n-1}z_k=z_0+z_1+.........z_{n-1}=0$)

C. الجذور من الرتبة n لعدد عقدي غير منعدم :

01. خاصية :

ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^*$.

العدد العقدي $Z = [R,\theta] = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ له n جذر من الرتبة n وهي :

$$z_k = \left[\sqrt[n]{R}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right] = \sqrt[n]{R}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{R}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$ مع $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$

02. خاصية : (العلاقة بين u_k و z_k) :

إذا كان Z_0 (معلوم) هو أحد الجذور من الرتبة n ل $\mathbb{Z}$ للحصول على باقي الجذور من الرتبة n ل Z يكفي بضرب هذا الحل Z_0 في u_k (الجذور من الرتبة n للوحدة) أي $z_k = Z_0 \times u_k$.

03. برهان :

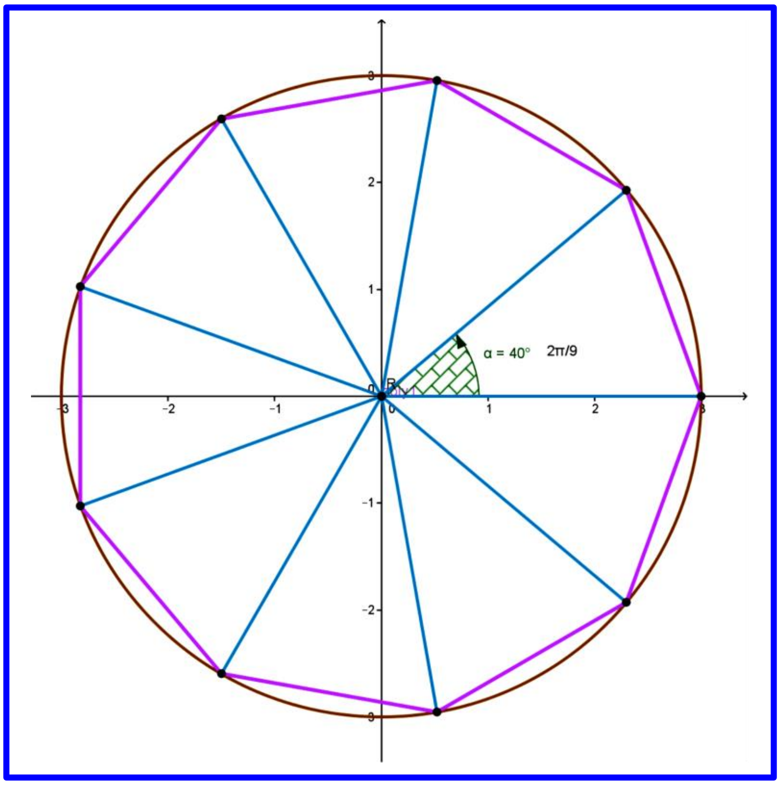
نعتبر $(Z_0)^n = Z$.

من جهة أخرى :

$$\begin{aligned} z^n = Z &\Leftrightarrow z^n = (Z_0)^n \\ &\Leftrightarrow \frac{z^n}{(Z_0)^n} = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{Z_0}\right)^n = 1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \frac{z}{Z_0}$ جذر من الرتبة n للوحدة

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{z}{Z_0} = u_k \quad , \ k \in \{0,1,2,\dots,n-1\} \\ &\Leftrightarrow z = Z_0 \times u_k \ , \ k \in \{0,1,2,\dots,n-1\} \end{aligned}$$



04. خاصية :

صور الجذور من الرتبة n للوحدة هي رؤوس مضلع منتظم له n ضلع و محاط بالدائرة $\mathscr{C}(O, \sqrt[n]{R})$ في المعلم م.م.م $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

IV. الشكل العقدي لبعض التحويلات في المستوى :

01. مفردات :

في هذه الفقرة نعتبر المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م. $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ لنعتبر التحويل في المستوى (P) (من المستوى نحوى المستوى) المعرف بما يلي :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = z' \qquad ; \qquad F : (P) \to (P), \quad M_{(z)} \mapsto F(M) = M'_{(z')}$$

- f يسمى التمثيل العقدي ل F .
- $f(z)=z'$ تسمى الكتابة العقدية ل F .
- التطبيقات التي سنحصل عليها هي على شكل : $f(z)=z' \Leftrightarrow z'=az+b$

02. الإزاحة : Translation

الإزاحة $t_{\vec{u}}$ ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث لحق $\vec{u}$ هو b

لتكن $M_{(z)}$ من (P) حيث صورتها ب $t_{\vec{u}}$ هي النقطة : $M'_{(z')}$.

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}\left(M_{(z)}\right)=M'_{(z')} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \\ &\Leftrightarrow z'-z=b \\ &\Leftrightarrow z'=z+b \end{aligned}$$

❖ خاصية :

> الكتابة العقدي للإزاحة $t_{\vec{u}}$ هي $f(z)=z'=z+b$ حيث b لحق المتجهة $\vec{u}$.

- $f(z)=az+b$ إذا كان $a=1$ التحويل f هو إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث b لحقها . المتجهة $\vec{u}$

03. التحاكي : Homothétie

ليكن $h(\Omega,k)$ التحاكي الذي مركزه $\Omega_{(\omega)}$ و نسبته k مع $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

لتكن $M_{(z)}$ من (P) حيث صورتها ب h هي النقطة : $M'_{(z')}$.

$$\begin{aligned} h\left(M_{(z)}\right)=M'_{(z')} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M} \\ &\Leftrightarrow z'-\omega=k(z-\omega) \\ &\Leftrightarrow z'=kz+\omega(1-k) \\ &\Leftrightarrow z'=kz+b \qquad ; b=\omega(1-k) \end{aligned}$$

❖ خاصية :

> الكتابة العقدي للتحاكي $h\left(\Omega_{(\omega)},k\right)$ هي $f(z)=z'=kz+b$ مع $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ و $b=\omega(1-k)$.

- $f(z)=az+b$ إذا كان $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ التحويل f هو تحاكي نسبته a و لحق Ω مركزه التحاكي هو العدد العقدي $\omega=\dfrac{b}{1-a}$.

04. الدوران :

ليكن $r\left(\Omega_{(\omega)},\alpha\right)$ الدوران الذي مركزه $\Omega_{(\omega)}$ و قياس زاوينه α .

لتكن $M_{(z)}$ من (P) حيث صورتها ب r هي النقطة : $M'_{(z')}$.

$$r\left(M_{(z)}\right)=M'_{(z')} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-\omega|=|z-\omega| \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = 1 \times e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z'-\omega = (z-\omega)e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z' = \omega + (z-\omega)e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z' = ze^{i\alpha} + \omega\left(1-e^{i\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}z + b \qquad ; \; b = \omega\left(1-e^{i\alpha}\right)$$

❖ خاصية :

الكتابة العقدي للدوران $r\left(\Omega_{(\omega)}, \alpha\right)$ هي $f(z) = z' = e^{i\alpha}z + b$ مع $b = \omega\left(1-e^{i\alpha}\right)$.

- $f(z) = az + b$ إذا كان $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ و $|a| = 1$ (معيار a هو 1) التحويل f هو دوران حيث العدد العقدي $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ هو لحق Ω مركز الدوران و قياس زاوية الدوران هو $\arg a$.

05. اقتراح طريقة ثانية :

طريقة أخرى نعتبر التطبيقات التي على شكل $f(z) = az + b$

في هذه الفقرة نعتبر التحويل في المستوى (P) المنسوب إلى م.م.م.م $\left(0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ المعرف بما يلي :

$$f : (P) \rightarrow (P)$$
$$M_{(z)} \mapsto f(M) = M'_{(z')}$$
مع $z' = az + b$

- $a = 1$. لدينا :

$$z' = az + b \Leftrightarrow z' = z + b \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \quad ; \vec{u}_{(b)}$$

بمأن : b عدد عقدي معلوم إذن المتجهة $\vec{u}$ ثابتة و بالتالي التحويل f هو الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها b

- $a \neq 1$:

* النقطة Ω حيث لحقها هو ω هي صامدة بالتحويل تحقق ما يلي: $\omega = a\omega + b$ إذن: $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

بالتالي هناك نقطة وحيدة صامدة التي لحقها هو $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. (خارج عددين عقدين معلومين و عدد عقدي وحيد)

ومنه: $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ إذن: $z' - \omega = a(z - \omega)$ إذن: $a = \dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$

إذن: $\begin{cases} |a| = \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} \\ \arg a \equiv \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)[2\pi] \end{cases}$

إذن: $(1): \begin{cases} \Omega M' = |a|\Omega M \\ \arg a \equiv \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)[2\pi] \end{cases}$

❖ ندرس حالة: $|a| = 1$ مع ($a \neq 1$)

(1) يكافئ: $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg a \equiv \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv [2\pi] \end{cases}$

إذن : التحويل هو الدوران الذي قياسات زاويته هو $\arg a$ ومركزه Ω التي لحقها هو $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

ندرس حالة: $|a| \neq 1$ مع ($a \neq 1$) و $\arg a \equiv 0[2\pi]$. ومنه $a \in \mathbb{R}^{+*}$ (أي $a \in]0,+\infty[$)

(1) يكافئ: $\Omega M' = a\Omega M$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{\Omega M'}$ لهما نفس الاتجاه إذن: $\overrightarrow{\Omega M'} = a\ \overrightarrow{\Omega M}$ وبالتالي التحويل هو تحاكي نسبته : a

ومركزه هي النقطة Ω التي لحقها هو $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

❖ ندرس حالة: $|a| \neq 1$ مع ($a \neq 1$) و $\arg a \equiv \pi[2\pi]$

❖ ومنه $a \in \mathbb{R}^{-*}$ (أي $a \in]-\infty,0[$)

(1) يكافئ: $\Omega M' = -a\Omega M$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{\Omega M'}$ لهما إتجاهين متقابلين إذن: $\overrightarrow{\Omega M'} = -a\ \overrightarrow{\Omega M}$ وبالتالي التحويل هو تحاكي نسبته : a ومركزه هي النقطة Ω التي لحقها هو $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

07. خاصية:

نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى م.م.م.م. $(0,\vec{e_1},\vec{e_2})$ التحويل المعرف بما يلي :

$$f:(P) \to (P)$$
$$M_{(z)} \mapsto f(M) = M'_{(z'=az+b)}$$
(مع $z' = az+b$)

- إذا كان: $z' = z+b$ (أي $a = 1$) . التحويل f هو الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها b.
- إذا كان: $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ (أي a عدد حقيقي يخالف 1) التحويل f هو التحاكي الذي مركزه Ω التي لحقها $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ ونسبته هي a
- إذا كان : $|a| = 1$ مع ($a \neq 1$) . التحويل f هو الدوران مركزه Ω التي لحقها $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ الذي قياسات زاويته هو $\arg a$ أو

باختصار الدوران: $r\left(\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right),\arg a\right)$

08. أمثلة :

1) التحويل : $t: z \mapsto z' = z + 1 - i$

هو الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $b = 1 - i$.

أو أيضا هو الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1,-1)$.

خلاصة: التحويل هو الإزاحة: $t_{\vec{u}(1,-1)}$

2) التحويل : $r: z \mapsto z' = -iz + 1 - i$

هو الدوران الذي:

لحق مركزه $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1+i} = -i$ ومنه : $\Omega(0,-1)$

قياسات زاويته: $\arg a \equiv \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

خلاصة: التحويل هو الدوران: $r\left(\Omega(0,-1), -\frac{\pi}{2}\right)$

3) التحويل : $h: z \mapsto z' = 2z + 1 + i$

هو التحاكي الذي: لحق مركزه $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1-2} = -1-i$ ومنه : $\Omega(-1,-1)$ نسبته هي: $a = 2$

خلاصة: التحويل هو التحاكي: $h\left(\Omega(-1,-1), 2\right)$