التمرين الأول

نضع $f(z)=\frac{1-i}{2}z+\frac{1+i}{z}$ حيث z عدد من $\mathbb{C}^*$

1) أ- بين أن $\left[z\bar{z}=2 \text{ أو } \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\right] \Leftrightarrow \left[\overline{f(z)}=f(z)\right]$

ب- استنتج المجموعة $(\Sigma)=\{M(z)\in(P)/f(z)\in\mathbb{R}\}$

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2f(z)=(1+i)z+2i$

أ- بين أن $(E)\Leftrightarrow(z^3+2-2i=0)$

ب- تحقق أن $z_0=1+i$ حل للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E)

ج- أكتب حلول المعادلة (E) على الشكل المثلثي

التمرين الثاني

ليكن a من $\mathbb{C}^*$ و نعتبر التطبيق f_a المعرف من $\mathbb{C}-\{a\}$ نحو $\mathbb{C}-\{a\}$ بما يلي : $f_a(z)=\frac{az}{z-a}$

1) بين أن $\left[|z|^2\mathrm{Re}(a)=|a|^2\mathrm{Re}(z)\right]\Leftrightarrow\left[f_a(z)\in i\mathbb{R}\right]$

2) نضع $z-a=re^{i\theta}$ أحسب $|f_a(z)-a|$ بدلالة r ; $|a|$ و حدد $\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ ; $\arg(a)$

3) نأخذ في ما يلي $a=-1+i$ و نعتبر المجموعات $(\zeta)=\{M(z)\in(P)/|f_a(z)-a|=2\}$

$(D)=\left\{M(z)\in(P)/\arg(f_a(z)-a)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$ و $(\Gamma)=\{M(z)\in(P)/f_a(z)\in i\mathbb{R}\}$

أ- حدد المجموعات (Γ) ; (D) ; (ζ)

ب- ليكن z_0 من $\mathbb{C}-\{a\}$ و نعتبر النقطة $B(z_0)$ بحيث $B\in(D)\cap(\zeta)$

حدد الشكل الجبري للعدد $f_a(z)$ ثم استنتج z_0

التمرين الثالث

نضع $f(z)=\frac{iz-1}{(z+1)^2}$ لكل z من $\mathbb{C}-\{-1\}$

1) أ- حدد العدد الحقيقي y بحيث $f(iy)=iy$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=z$

نرمز ب z_0 ; z_1 ; z_2 لحلول المعادلة حيث $z_0\in i\mathbb{R}$ و $\mathrm{Re}(z_1)>\mathrm{Re}(z_2)$

2) أ- تحقق أن $z_1+1=\left[1,\frac{11\pi}{6}\right]$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب- استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين z_1 ; z_2

3) نفترض في ما يلي أن $z=e^{i\alpha}$; $0\le\alpha<\pi$

أ- بين أن $\overline{f(z)}=izf(z)$

ب- حدد α علما أن $f(z)$ تخيلي صرف

ج- أكتب $f(z)$ على الشكل $re^{i\theta}$ حيث $(r,\theta)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$

4) حدد z إذا علمت أن $|z|=1$ و $\mathrm{Re}(f(z))=\frac{1}{2}$

التمرين الرابع

نضع $s_n=\sum_{k=1}^{k=n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ و $s'_n=1+\sum_{k=1}^{k=n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$ حيث n عدد طبيعي و $n\ge2$.

نعتبر العدد العقدي $Z=s'_n+is_n$ (1 بين أن $\left(1-e^{i\frac{\pi}{n}}\right)Z=2$

2) حدد الشكل الجبري للعدد Z و استنتج أن $s_n=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$ و أحسب النهاية $\lim_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n}$