التمرين الأول

حدد مجموعة النقط $M(z)$ في الحالات التالية :

1) $C(1+iz)$, $B(z+i)$, $A(1+i)$ مستقيمية

2) النقط $P(z^3)$, $N(z^2)$, $M(z)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية في N

3) النقط $P(iz)$, $N(i)$, $M(z)$ تكون مثلثا قائم الزاوية في N

التمرين الثاني

حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل من الحالات التالية :

1) $|z+i|=|\bar{z}-1|$ 2) $\frac{z+1+i}{z-i}\in\mathbb{R}$ 3) $\frac{iz-1}{z+2i}\in i\mathbb{R}$ 4) $z\bar{z}+z+\bar{z}=3$

التمرين الثالث

حدد الشكل المثلثي العدد z في الحالات التالية :

1) $z=\frac{3\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$ 2) $z=(1+i)\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]$

3) $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$ و $\theta\in\,]0,2\pi[$ 4) $z=\cos2\theta+i\cos^2\theta$ و $\theta\in\,]0,\pi[$

5) $z=\sin\theta+i(1+\cos\theta)$ و $\theta\in\,]\pi,2\pi[$ 6) $z=\frac{1}{1+i\tan\theta}$ و $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

7) $z=\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\sin\alpha-i\cos\alpha}$ و $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ 8) $z=1+i\tan\alpha$ و $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

التمرين الرابع

بين ما يلي : 1) $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$

2) $\left(\ |z+z'|=|z|+|z'|\ \right)\Leftrightarrow\left(\ \arg(z)\equiv\arg(z')\ [2\pi]\ \right)$

3) ليكن a , b , c أعداد عقدية معيارها 1 بين أن $|ab+bc+ca|=|a+b+c|$

4) $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{C}^{*2}\right)\quad\left|\frac{a}{|a|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right|=\left|\frac{a-b}{ab}\right|$

5) $\left(\ |z+z'|=|z|+|z'|\ \right)\Leftrightarrow\left(\ \arg(z)\equiv\arg(z')\ [2\pi]\ \right)$

التمرين الخامس

لكل عدد عقدي z يخالف i نضع $Z=\frac{iz}{z-i}$

1) أحسب Z من أجل $z=2+3i$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $Z=1+2i$

3) أ- بين أن : $\left(\bar{Z}=Z\right)\Leftrightarrow\left(\left(z-\frac{1}{2}i\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{2}i\right)-\frac{1}{4}=0\right)$ $\quad(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\})$

ب- استنتج مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى (P) و التي يكون من أجلها Z حقيقي

4) حدد المجموعة (D) للنقط $M(z)$ من المستوى (P) و التي يكون من أجلها $|Z|=1$

التمرين السادس
التمرين السادس

ليكن z عددا عقديا بحيث $z\neq i$ و نضع $Z=\dfrac{i+z}{iz+1}$

1) أحسب Z من أجل $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z=2$

3) أ- أكتب $\overline{Z}$ بدلالة z و $\overline{z}$

ب- بين أن $\left(z+\overline{z}\right)\left(i(z-\overline{z})-2\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \overline{Z}=-Z \quad : \quad \left(\forall z\in\mathbb{C}-\{-i\}\right)$

ج- استنتج (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها Z عددا تخيليا

4) حدد (D) مجموعة النقط $M(z)$ و التي يكون من أجلها $|Z|=1$

5) أ- بين أن $z^2+\overline{z}^2+2i\left(z-\overline{z}\right)-2=0 \;\Leftrightarrow\; \overline{Z}=Z \quad : \quad \left(\forall z\in\mathbb{C}-\{-i\}\right)$

ب- استنتج (C) مجموعة النقط M ذات اللحق z و التي يكون من أجلها Z عددا حقيقي

التمرين السابع
التمرين السابع

نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A , B , C التي ألحاقها على التوالي $a=\sqrt{3}+i$, $b=-2i$ و $c=-2\sqrt{3}$

1) حدد الشكل المثلثي للعددين b , a

2) أ- بين أن : $\dfrac{b-a}{b-c}=-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

3) حدد d لحق النقطة D كي يكون $ABCD$ مربع

التمرين الثامن
التمرين الثامن

نعتبر النقطتين A ; B ذات اللحق $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$ على التوالي

1) حدد الشكل المثلثي للعددين z_A , z_B

2) أحسب $\dfrac{z_B}{z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAB و حدد قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

3) نعتبر العدد $z_C=z_A+z_B$ و النقطة $C(z_C)$

أ- ما هي طبيعة الرباعي $OACB$

ب- حدد قياسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ و استنتج أن $\arg(z_C)\equiv\dfrac{5\pi}{12}\;[2\pi]$

ج- استنتج قيمة كل من $\sin\dfrac{5\pi}{12}$; $\cos\dfrac{5\pi}{12}$

التمرين التاسع
التمرين التاسع

نعتبر العدد العقدي $Z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ و نضع $\theta\equiv\arg(Z)\;[2\pi]$

1) بين أن $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (دون حساب θ)

2) أ- بين أن $Z^2 = 2\sqrt{2}(1+i)$

ب- حدد الشكل المثلثي للعدد $u = 1+i$ و استنتج أن $\theta = \frac{\pi}{8}$

ج- أحسب $\sin\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{8}$

التمرين العاشر

نعتبر العددين $z_1 = (\sqrt{3}+2)+i$ و $z_2 = 1+(\sqrt{3}-2)i$ و نضع $\theta \equiv \arg(z_1)\ [2\pi]$

و لتكن A , B نقطتان لحقاهما z_1 ; z_2 على التوالي

1) أ- بين أن $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (دون حساب θ)

ب- بين أن $z_1 z_2 = 4$ و استنتج أن $\arg(z_2) \equiv -\theta\ \ [2\pi]$

2) أ- بين أن $\frac{z_1}{z_2} = (2+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

ب- استنتج طبيعة المثلث OAB و حدد قياس الزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

ج- استنتج أن $\theta = \frac{\pi}{12}$

3) بين أن $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

التمرين الحادي عشر

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ما يلي :

$iZ^2+(1+i)Z+1=0$	$Z^2+2(1-i)Z-1=0$	$Z^2+(1+i)Z+i=0$
$2iZ^2+2(1-i)Z+3=0$	$Z^2-(\sqrt{3}+9i)Z-8(1-i\sqrt{3})=0$	$Z^2-2(\cos\alpha)Z+1=0$
$(Z^2+3Z-2)^2+(2Z^2-3Z+2)^2=0$	$Z^2-2Z+1+a^2=0$ حيث $a\in\mathbb{C}$	$(E)\ \ Z^2-m(1+i)Z+im^2=0$

2) حدد الجذرين المربعين للعدد $-2-2i\sqrt{3}$ ثم حل المعادلة $Z^2-(3+i\sqrt{3})Z+2(1+i\sqrt{3})=0$

3) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ \ Z^3+3(3-i)Z^2+(24-9i)Z-26i=0$

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده ثم حل المعادلة (E)

4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ \ 2iZ^3+2(2-i)Z^2-(3+2i)Z+i=0$

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده ثم حل المعادلة (E)

5) أ- بين أن المعادلة $2Z^3+(-7+i)Z^2+(10-4i)Z-8+4i=0$ (E) علما أنها تقبل حلا حقيقيا a

ب- حدد الحلين الآخرين z_1 , z_2 للمعادلة (E) (نأخذ $\text{Im}(z_2)<0$)

ج- حدد الشكل الجبري للعدد z_1^{2003}

د- نعتبر النقط $A(a)$, $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ ما هي طبيعة المثلث AM_1M_2

التمرين الثاني عشر

نضع $f(z)=z^3+(1-i)z^2+2(1+i)z-8i$

1) بين أن المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده

2) أ- حدد الأعداد العقدية a , b , c بحيث $f(z)=(z-z_0)(az^2+bz+c)$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=0$

ج- نعتبر النقط $A(1+i)$; $B(-2i)$; $C(-2+2i)$ أحسب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث

التمرين الثالث عشر

1) حدد الشكل المثلثي لحلول المعادلة : $z^4+z^3+z^2+z+1=0$

2) استنتج أن $z^5-1=(z-1)\left(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{4\pi}{5}+1\right)$

3) حدد قيمتي $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5}$

التمرين الرابع عشر

نعتبر الحدودية $H(z)=z^6-2z^3\cos(3\alpha)+1$ حيث α عدد حقيقي

1) بين أن حلول المعادلة $H(z)=0$ تكتب $a_k=\left[1,-\alpha+\frac{2k\pi}{3}\right]$ و $b_k=\left[1,\alpha+\frac{2k\pi}{3}\right]$ حيث $k\in\{0,1,2\}$

2) تحقق أن $\overline{b_0}=a_0$; $\overline{b_1}=a_2$; $\overline{b_2}=a_1$

أثبت أن $\cos(3\alpha)=4\cos\alpha\,\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$

التمرين الخامس عشر

نضع $f(x)=4x^3-3x+\frac{1}{2}$

1) أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1,1]$

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول في المجال $[-1,1]$

3) باستعمال الاخطاط بين أن $\sin^3 t=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$ و استنتج أن حلول المعادلة $f(x)=0$

هي $\sin\frac{\pi}{18}$; $\sin\frac{5\pi}{18}$; $\sin\frac{7\pi}{18}$ ثم حدد قيمة $\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}$

التمرين السادس عشر

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+\frac{1}{\cos^2\theta}=0$ (E_θ) حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1) حدد z_1 ; z_2 حلي المعادلة (E_θ) (نأخذ z_1 بحيث $im(z_1)=\tan\theta$)

2) حدد الشكل المثلثي لكل من z_1 ; z_2

3) نعتبر في المستوى العقدي (P) النقطتين $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$ ما هي طبيعة المثلث OM_1M_2

4) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ حدد الشكل المثلثي لحلول المعادلة $z^{2n}-2z^n+\frac{1}{\cos^2\theta}=0$

التمرين السابع عشر

ليكن θ من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) \quad z^2 + 2\cos\theta(1+\cos\theta)z + (1+\cos\theta)^2 = 0$

و أكتب الحلين عل الشكل المثلثي

2) حدد على الشكل المثلثي z_1 ; z_2 الجذرين المربعين للعدد $a = 2\cos^2\frac{\theta}{2}(-\cos\theta + i\sin\theta)$

3) استنتج الشكل المثلثي ل z_3 ; z_4 الجذرين المربعين للعدد $\bar{a}$

4) نضع $s_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

بين أن $s_{2p+1} = 0$ و أن $s_{2p} = (-1)^p 2^{p+2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2p}\cos(p\theta)$

التمرين الثامن عشر

ج- أ- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) \quad z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$ حيث α عدد حقيقي

ب- استنتج الشكل المثلثي لحلول المعادلة $(E') \ : z^{10} - 2z^5\cos\alpha + 1 = 0$

2) بين أن $(\forall z \in \mathbb{C}) \ : z^{10} - 2z^5\cos\alpha + 1 = \prod_{k=0}^{k=4}\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{5}\right) + 1\right)$

3) نضع $H(z) = z^{10} - 2z^5\cos\alpha + 1 = 0$

أ- أحسب $H(1)$ و أثبت أن $\prod_{k=0}^{k=4}\sin^2\left(\frac{\alpha}{10} + \frac{k\pi}{5}\right) = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{256}$

ب- ليكن α من المجال $]0,\pi[$ و نضع $K(\alpha) = \prod_{k=1}^{k=4}\sin\left(\frac{\alpha}{10} + \frac{k\pi}{5}\right)$ بين أن $K(\alpha) = \frac{1}{16}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{10}}$

ج- استنتج قيمة $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$

التمرين التاسع عشر

1) بين أن $e^{2ix} - 1 = 2i\sin x \ e^{ix} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+1)^n = e^{2ina}$ حيث $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$

3) نضع $P_n = \prod_{k=0}^{k=n-1}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

أ- أحسب $\prod_{k=0}^{k=n-1} e^{i\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)}$

ب- نعتبر $f(z) = (z+1)^n - e^{2ina}$ بين أن $P_n = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

التمرين العشرون

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. A , B , C ثلاث نقط من الدائرة $\zeta(O,R)$ ألحاقها على التوالي هي a , b , c

1) بين أن $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$

2) نضع $w = \bar{b}c - b\bar{c}$

أ- بين أن العدد w تخيلي

ب- بين أن $(b+c)(\overline{b}-\overline{c})=w$ ثم استنتج أن $\frac{b+c}{b-c}=\frac{w}{(b-c)^2}$

ج- استنتج أن $\frac{b+c}{b-c}$ تخيلي

ب- لتكن H النقطة التي لحقها $a+b+c$

أ- حدد لحق كل من $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{CB}$ بدلالة a , b , c ثم بين أن $\overline{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AH})}\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ماذا تستنتج ؟

ب- بين أن H هي مركز تعامد المثلث ABC

التمرين الحادي و العشرون

لتكن $A(-2+3i)$ و $B(1-3i)$ نقطتين في المستوى العقدي (P) .

نعتبر $M(z)$ حيث $z\neq-2+3i$ و نضع $Z'=\frac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1) حدد علاقة بين عمدة Z' و قياس الزاوية الموجهة $\left(\overline{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)$

2) أ- حدد أرسم المجموعتين $E_1=\left\{M(z)\ /\ \arg(Z')\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right\}$ و $E_2=\left\{M(z)\ /\ |Z'|=2\right\}$

ب- حدد لحق النقطة F تقاطع المجموعتين E_1 , E_2

التمرين الثاني و العشرون

لكل عدد عقدي z يخالف i نضع $f(z)=\frac{iz}{z-i}$

ب- أ- بين أن $(z\in i\mathbb{R})\ \Leftrightarrow\ (f(z)\in i\mathbb{R})$

ب- حدد المجموعة $(E_1)=\{M(z)\ /\ f(z)\in\mathbb{R}\}$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=1-2z$

3) نضع $z-i=re^{i\alpha}$

أ- حدد الشكل المثلثي للعدد $f(z)-i$

ب- حدد و أرسم المجموعتين :

$\zeta=\{M(z)\ /\ |f(z)-i|=\sqrt{2}\}$ و $D=\left\{M(z)\ /\ \arg(f(z)-i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$

التمرين الثالث والعشرون

نعتبر العدد $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و نضع $f(z)=z+j^2\overline{z}$

1) بين أن $|f(z)|^2-2|z|^2=2\operatorname{Re}(jz^2)$

2) بين أن $j^2f(z)\in\mathbb{R}$

3) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ نضع $f^1=f$ و $f^n=f\circ f^{n-1}$ لكل $n>1$

أ- أحسب $f^2(z)$

ب- بين أن $f^n(z)=2^{n-1}f(z)$