الاشتـــــقـــــــــــــاق

I)- اشتقاق مركب دالتين:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح و g دالة للاشتقاق على f(I).

– لنبين أن gof قابلة للاشتقاق على I.

ليكن $x_0 \in I$

لدينا:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{gof(x)-gof(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ولدينا f قابلة للاشتقاق في x_0 إذن $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

نضع $X=f(x)$ ، $X_0=f(x_0)$

لدينا $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ (لأن f قابلة للاشتقاق في x_0 بالتالي متصلة في x_0).

إذن $x\to x_0$ يعني $f(x)\to f(x_0)$ يعني $X\to X_0$

إذن :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{X\to X_0}\frac{g(X)-g(X_0)}{X\to X_0}=g'(X_0)$$

لأن g قابلة للاشتقاق في X_0.

إذن :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{gof(x)-gof(x_0)}{x-x_0}=g'(X_0).f'(x_0)$$
$$=g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

إذن gof قابلة للاشتقاق x_0 و : $(gof)'(x_0)=(g'of(x_0).f'(x_0)$

بالتالي gof قابلة للاشتقاق على I : $(\forall x\in I)\ \ (gof)'(x)=(g'of(x)).f'(x)$

خاصية:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

فإن gof قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x\in I)\ \ (gof)'(x)=g'f(x).f'(x)$

مثال:

نعتبر الدالة $f(x)=\cos(x^3+x-1)$

لدينا : $f(x)=hog(x)$ حيث $g(x)=x^3+x-1$ و $h(x)=\cos x$

ولدينا h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $h'(x)=-\sin x$

و $g(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ إذن $f=hog$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و
$$(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f'(x)=(hog)'(x)=h'(g(x)).g'(x)$$
$$=h'(x^3+x-1)).(3x^2+1)$$
$$=-\sin(x^3+x-1)).(3x^2+1)$$

إذن: $f'(x)=-(3x^2+1).\sin(x^3+x-1)$

ملاحظة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن الدوال: $x\to\cos(u(x))$ ، $x\to\sin(u(x))$ ، $x\to tan(u(x))$

قابلة للاشتقاق على I و
$$(\forall\in I)\quad (\cos(u(x)))'=-u'(x).\sin(u(x))$$
$$(\sin(u(x)))'=-u'(x).\cos(u(x))$$
$$(\tan(u(x)))'=-u'(x)\left[1+\tan^2(u(x))\right]$$

II- اشتقاق الدالة العكسية و تطبيقاتها:

1- اشتقاق الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

نعلم أن f تقابل من I نحو $J=f(I)$ و بالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}:J\to I$

- نفترض أن f قابلة للاشتقاق على I.
- لندرس اشتقاق f^{-1} على J.

ليكن $y_0\in J$ لنحسب $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$

نضع $\begin{cases} f^{-1}(y_0)=x_0 \\ f^{-1}(y)=x \end{cases}$ يعني $\begin{cases} f(x_0)=y_0 \\ f(x)=y \end{cases}$

ولدينا : $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)=x_0$ لأن f^{-1} متصلة.

إذن $y\to y_0$ يعني $f^{-1}(y)\to x_0$ يعني : $x\to x_0$

إذن:
$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

ونعلم أن f قابلة للاشتقاق في x_0 إذن: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

إذا كانت $f'(x)\neq 0$ فإن : $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0 و : $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

إذن إذا كانت $f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ و $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

خاصية:

> إذا كانت f قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعا على مجال I و $(\forall\in I)\ :\ f'(x)\neq 0$
>
> فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و $(\forall x\in I)\quad (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

2- تطبيقات:

a) اشتقاق دالة الجدر من الرتبة n : $(n\geq 2)$

نعتبر الدالة: $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$x\to x^n$

نعلم أن f تقابل و $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$

*) لدينا : f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $f'(x)=nx^{n-1}$ ولدينا : $x=0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x)$

*) لدينا f قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعا على $]0,+\infty[$ و $f'(x)\neq 0$ $\left(\forall x\in\,]0,+\infty[\right)$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$

و : $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\quad (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(\sqrt[n]{x})}=\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

إذن : $(\forall\in\,]0,+\infty[)\quad (\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

يعني : $((x)^{\frac{1}{n}})'=\dfrac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}=\dfrac{1}{n(x)\dfrac{n-1}{n}}=\dfrac{1}{n}.x^{\frac{1-n}{n}}$

يعني: $(x^{\frac{1}{n}})'=\dfrac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1}$

خاصية

الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و $(\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ $(\forall\in\,]0,+\infty[)$

يعني: $(x^{\frac{1}{n}})'=\dfrac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1}$

ملاحظة :

* إذا كانت U قابلة للاشتقاق على I و $U(x)>0 \quad : \quad (\forall\in\,]0,+\infty[)$

فإن الدالة $x\to\sqrt[n]{u(x)}$ قابلللإشتقاق على I و $(\sqrt[n]{U(x)})'=\dfrac{U'(x)}{n(\sqrt[n]{U(x)})^{n-1}}$ $(\forall\in I)$

يعني : $\left[(U(x)^{\frac{1}{n}}\right]=\dfrac{U'(x)}{n}.(U(x))^{\frac{1}{n}-1}$

حالة خاصة : $(\sqrt{U(x)})'=\dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$ و $(\sqrt[3]{U(x)})'=\dfrac{U'(x)}{3(\sqrt[3]{U(x)})^2}$

b) اشتقاق الدالة $x\to x^r$ مع $r\in\mathbb{Q}$:

باستعمال اشتقاق مركب دالتين نبين ما يالي:

خاصية :

ليكن $r\in\mathbb{Q}$. الدالة $x\to x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و $(x^r)'=rx^{r-1}$ $(\forall\in\,]0,+\infty[)$

ملاحظة:

إذا كانت U قابلة للاشتقاق على I و $(\forall\in I):\ u(x)>0$

فإن الدالة $x\to(U(x))^r$ قابلة للاشتقاق على I و $(\forall\in I):\ (U(x)^r)'=r(U(x)')(U(x))^{r-1}$

c) اشتقاق الدالة $Arcsin$ ، $Arc\cos$ ، $Arc\tan$:

نعتبر الدالة: $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$

$x\to\sin x$

نعلم أن $f^{-1}(x)=Arc\sin x$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ و $f'(x)=\cos x$

ولدينا : $x=\dfrac{\pi}{2}$ أو $x=\dfrac{\pi}{2} \iff f'(x)=0$

– لدينا f قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعا على $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $]-1,1[=(\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[)f$ و

$$(\forall x\in\,]-1,1[)\quad (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$=\frac{1}{\cos(Arc\sin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذن $(\forall x\in]-1,1[)\quad (Arc\sin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

– بنفس الطريقة ندرس اشتقاق $Arc\cos$ و $Arc\tan$.

خاصية:

1– الدالتان : $x\to Arc\sin x$ و $x\to Arc\cos x$ قابلتان للاشتقاق على $]-1,1[$

و $(Arc\cos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ و $(\forall x\in]-1,1[)\quad (Arc\sin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2– الدالة $Arc\tan$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ $\quad (\forall x\in \mathbb{R})\quad (Arc\tan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

ملاحظة:

1– إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $(\forall \in I)\quad -1<U(x)<1$

فإن الدالتين $x\to Arc\sin(U(x))$ و $x\to Arc\cos(U(x))$

قابلتين للاشتقاق على I و: $(\forall \in I)\quad :\quad [Arc\sin(U(x)]'=\dfrac{U'(x)}{\sqrt{1-(U(x)^2}}$

و $[Arc\cos(U(x)]'=\dfrac{-U'(x)}{\sqrt{1-(U(x)^2}}$

2– إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و: $(\forall \in I)\quad :\quad [Arc\tan(U(x)]'=\dfrac{U'(x)}{1+U(x)^2}$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1:

نعتبر الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-x$

* ادرس اشتقاق f و احسب $f'(x)$:

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و

$$f'(x)=\frac{((x+1)^2)'}{3(\sqrt[2]{(x+1)^2}^{\,2}}-1$$

$$=\frac{2(x+1)'(x+1)}{3(\sqrt[3]{(x+1)^2})^2}-1$$

إذن $f'(x)=\dfrac{2(x+1)}{3(\sqrt[3]{(x+1)^2})^2}-1$

طريقة أخرى:

لدينا : $f(x)=|x+1|^{\frac{2}{3}}-x$

* إذا كان $x>-1$ فإن: $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}-x$

إذن $f'(x)=\dfrac{2}{3}(x+1)'(x+1)^{\frac{2}{3}-1}-1$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}}-1$$

إذن $f'(x)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-1$

* إذا كان $x<-1$ فإن : $f(x)=(-x-1)^{\frac{2}{3}}-x$

إذن :
$$f'(x)=\frac{2}{3}(-x-1)'(-x-1)^{\frac{-1}{3}}-1$$
$$f'(x)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{-x-1}}-1$$

لندرس الاشتقاق في -1 :

لدينا
$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-x-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x+1}-1$$

		1	
x+1	−	0	+

لدينا:
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-1=-\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين -1. و ε_f يقبل نصف مما في موازي لمحور الأراتيب موجه نحو الأعلى على يمين النقطة $A(-1,1)$

– ولدينا :
$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x+1}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{-\sqrt[3]{-(x+1)^3}}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^-}-\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{-(x+1)^3}}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{-1}{\sqrt[3]{-(x+1)}}-1=-\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يسار -1 و ε_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب موجه نحو الأعلى على يسار $A(-1,1)$.

تمرين 2 أدرس اشتقاق الدوال arccos و arcsin على يمين -1 و على يسار 1 .

تمرين 3

احسب النهايات التالية:

1)
$$\boxed{l=\lim_{x\to1}\frac{Arc\cos(\frac{1}{1+x^2})-\frac{\pi}{3}}{x-1}}$$

$$l=\lim_{x\to1}\frac{Arc\cos(\frac{1}{1+x^2})-Arc\cos(\frac{1}{2})}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{Arc\cos(\frac{1}{1+x^2})-Arc\cos(\frac{1}{2})}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}{x-1}$$

- لدينا

$$\lim_{x\to 1}\frac{Arc\cos(\frac{1}{1+x^2})-Arc\cos(\frac{1}{2})}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{Arc\cos(t)-Arc\cos(\frac{1}{2})}{t-\frac{1}{2}}=(Arc\cos t)'_{t=\frac{1}{2}}$$

$$=(\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}})_{t=\frac{1}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}$$

- ولدينا:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2-(1+x^2)}{2(1+x^2)}.\frac{1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{2(1+x^2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{2(1+x^2)}=\frac{-1}{2}$$

إذن: $l=\frac{-2}{\sqrt{3}}.\frac{-1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2 $\boxed{l=\lim_{x\to 0^+}\frac{Arc\sin(\frac{1}{x^4+x+1})-\frac{\pi}{2}}{x}}$

$$l=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arcsin(\frac{1}{x^4+x+1})-A\mathrm{rcsin}(1)}{\frac{1}{x^4+x+1}-1}.\frac{\frac{1}{x^4+x+1}-1}{x}$$

ولدينا: $l_1=\lim_{x\to 0^+}\frac{Arc\sin(\frac{1}{x^4+x+1})-Arc\sin 1}{\frac{1}{x^4+x+1}-1}$

$$=\lim_{t\to 1^-}\frac{Arc\sin(t)-Arc\sin 1}{t-1}=\lim_{t\to 1^-}\frac{Arc\sin t-\frac{\pi}{2}}{t-1}$$

نضع : $X=Arc\sin t-\frac{\pi}{2}$

*) لدينا $-\frac{\pi}{2}\le Arc\sin t\le\frac{\pi}{2}$ يعني : $-\pi\le Arc\sin t-\frac{\pi}{2}\le 0$ يعني : $-\pi\le X\le 0$

*) $t\to 1^-\Leftrightarrow X\to 0^-$

*) لدينا : $X=Arc\sin t-\frac{\pi}{2}$ يعني : $Arc\sin t=X+\frac{\pi}{2}$ يعني : $t=\sin(X+\frac{\pi}{2})$

يعني : $t=\cos X$

إذن $\lim_{t\to 1^-}\frac{Arc\sin t-\frac{\pi}{2}}{t-1}=\lim_{X\to 0^-}\frac{X}{\cos X-1}$

$$=\lim_{X\to 0^-}\frac{-X}{\frac{1-\cos X}{X^2}.X^2}=\lim_{X\to 0^-}\frac{-1}{\frac{1-\cos X}{X^2}.X}=+\infty$$

إذن : $l_1=+\infty$

- ولدينا : $l_2=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^4+x+1}-1}{x}$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1-(x^4+x+1)}{(x^4+x+1).x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-x^4-x}{x(x^4+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-x^3-1}{x^4+x+1} = -1$$

إذن : $l_2 = -1$

ومنه: $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

(3 $\boxed{l = \lim_{x\to0} \frac{Arc\sin(x^2-1)+\frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x\to0^+} f(x)}$

طريقة 1 :

-نضع $t = Arc\sin(x^2-1)+\frac{\pi}{2}$

*) لدينا : $-\frac{\pi}{2} \le Arc\sin(x^2-1) \le \frac{\pi}{2}$ يعني : $0 \le Arc\sin(x^2-1)+\frac{\pi}{2} \le \pi$

يعني : $0 \le t \le \pi$

*) لدينا : $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0^+$

*) لدينا : $t-\frac{\pi}{2} = Arc\sin(x^2-1)$ يعني : $\sin(t-\frac{\pi}{2}) = x^2-1$

يعني : $-\sin(\frac{\pi}{2}-t) = x^2-1$ يعني : $-\cos(t) = x^2-1$

يعني : $x^2 = 1-\cos(t)$

يعني : $\begin{cases} x = \sqrt{1-\cos t} \\ x = -\sqrt{1-\cos t} \end{cases}$ أو

– إذا كان $x \to 0^+$ فإن $x = \sqrt{1-\cos t}$

و إذا كان $x \to 0^-$ فإن $x = -\sqrt{1-\cos t}$

إذن : $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{t\to0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{t}{\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}.t^2}} = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{t\to0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{t}{\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}.t^2}} = \lim_{t\to0^+} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}} = -\sqrt{2}$$

طريقة 2:

– نضع : $g(x) = Arc\sin(x^2-1)+\frac{\pi}{2}$

$Dg = \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

لنبسط $g(x)$:

– لدينا : $x^2-1=1 \Leftrightarrow x^2=2$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

ولدينا :

$$x^2-1=-1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

إذن g قابلة للاشتقاق على $\left]-\sqrt{2},0\right[\cup\left]0,\sqrt{2}\right[$

و $$g'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}=\frac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{2x^2(1-\frac{x^2}{2})}}=\frac{2x}{\sqrt{2}|x|\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}=2\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x}{|x|\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}$$

+ إذا كان $x\in\left]0,\sqrt{2}\right[$ فإن :

$$g'(x)=2\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}=2\frac{(\frac{x}{\sqrt{2}})'}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}$$

$$=(2.Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}}))'$$

إذن : $$g(x)=2.Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})+\lambda$$

و من أجل $x=1$ لدينا : $$g(1)=2.Arc\sin(\frac{1}{\sqrt{2}})+\lambda$$

يعني : $$\frac{\pi}{2}=2.\frac{\pi}{4}+\lambda$$

يعني : $$\lambda=0$$

إذن : $$g(x)=2.Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

* إذا كان $x\in\left]-\sqrt{2},0\right[$ فإن :

$$g'(x)=-2.\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}=(-2Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}})'$$

إذن $$g(x)=-2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})+\lambda'$$

و من أجل $x=-1$

لدينا : $$g(-1)=-2Arc\sin(\frac{-1}{\sqrt{2}})+\lambda'$$

يعني : $$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\lambda'$$
$$\lambda'=0$$

إذن : $$g(x)=-2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

وبالتالي : $$g(x)=\begin{cases}2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}});\ x\in\left[0,\sqrt{2}\right[\\ -2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}});\ x\in\left[-\sqrt{2},0\right[\end{cases}$$

إذن : $$l=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$$

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2Arc\sin\frac{x}{\sqrt2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2Arc\sin\frac{x}{\sqrt2}}{\frac{x}{\sqrt2}}.\frac{\frac{x}{\sqrt2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\sqrt2.\frac{Arc\sin\frac{x}{\sqrt2}}{\frac{x}{\sqrt2}}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\sqrt2.\frac{Arc\sin t}{t}=\lim_{t\to0^+}\sqrt2.\frac{Arc\sin t-Arc\sin 0}{t-0}$$

$$=\sqrt2.(Arc\sin t)'_{t=0}=\sqrt2.(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})_{t=0}=\sqrt2$$

– و لدينا :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-2Arc\sin\frac{x}{\sqrt2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-2Arc\sin\frac{x}{\sqrt2}}{\frac{x}{\sqrt2}}.\frac{\frac{x}{\sqrt2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}-\sqrt2.\frac{Arc\sin\frac{x}{\sqrt2}}{\frac{x}{\sqrt2}}$$

$$=\lim_{t\to0^-}-\sqrt2.\frac{Arc\sin t}{t}$$

$$=-\sqrt2(Arc\sin t)'_{t=0}=-\sqrt2(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})=-\sqrt2$$

(4 $\boxed{l=\lim_{+\infty}x\,(Arc\tan(\frac{x+1}{x})-\frac{\pi}{4})}$

$$l=\lim_{+\infty}x\,(Arc\tan(\frac{x+1}{x})-Arc\tan1)$$

$$=\lim_{+\infty}x(\frac{Arc\tan(\frac{x+1}{x})-Arc\tan1}{\frac{1+x}{x}-1})(\frac{1+x}{x}-1)$$

$$=\lim_{t\to1}(\frac{Arc\tan(t)-Arc\tan1}{t-1})=(Arc\tan t)'_{t=1}\quad=\lim_{+\infty}(\frac{Arc\tan(\frac{x+1}{x})-Arc\tan1}{\frac{1+x}{x}-1})$$

$$=\frac{1}{1+t^2}=\frac12$$

(5 $\boxed{l=\lim_{-\infty}x\,(Arc\tan(\frac{x^2+1}{x})+\frac{\pi}{2})}$

لدينا : $\frac{x^2+1}{x}<0$ بجوار $-\infty$

إذن $Arc\tan(\frac{x^2+1}{x})+Arc\tan(\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}})=-\frac{\pi}{2}$

يعني $Arc\tan(\frac{x^2+1}{x})+\frac{\pi}{2}=-Arc\tan(\frac{x}{x^2+1})$

إذن : $l=\lim_{-\infty} x\,(Arc\tan(\frac{x^2+1}{x})+\frac{\pi}{2})$

$$=\lim_{-\infty} x(-Arc\tan(\frac{x}{x^2+1}))$$

$$=\lim_{-\infty} -x(Arc\tan(\frac{x}{x^2+1})-Arc\tan 0)$$

$$=\lim_{-\infty} -x(\frac{Arc\tan(\frac{x}{x^2+1})-Arc\tan 0}{\frac{x}{x^2+1}}).\frac{x}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{(\frac{Arc\tan(\frac{x}{x^2+1})-Arc\tan 0}{\frac{x}{x^2+1}-0})}_{l_1}.\underbrace{\frac{-x^2}{x^2+1}}_{l_2}$$

و لدينا : $l_1=\lim_{t\to 0}\frac{Arc\tan t-Arc\tan 0}{t-0}$

$$=(Arc\tan t)'_{t=0}=\frac{1}{1+t^2}=1$$

$$l_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

إذن : $l=-1$

ملاحظة :

*) من اجل حساب $l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha}{x-x_0}$

– إذا كان $\boxed{\lim_{x\to x_0}U(x)\neq\pm1}$ يعني: $\alpha\neq\pm1$

لدينا: $l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha}{U(x)-\alpha}.\frac{U(x)-\alpha}{x-x_0}$

– إذا كان $\boxed{\lim_{x\to x_0}U(x)\neq\pm1}$ يعني: $\alpha\neq\pm1$ نقوم بحساب $U'(x)$

+ إذا كان $\boxed{\lim_{x\to x_0}U'(x)\neq 0}$: $l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha}{U(x)-\alpha}.\frac{U(x)-\alpha}{x-x_0}$

+ إذا كان $\boxed{\lim_{x\to x_0}U'(x)=0}$: . نستعمل تغيير المتغير بوضع $t=Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha$

إذا كان حساب x بدلالة t سهلا.

. أو تبسيط الدالة $g(x)=Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha$

*) بنفس الطريقة نحسب :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha}{x-x_0}$$

*) حساب : $l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\tan U(x)-\alpha}{x-x_0}$

– إذا كان $\lim_{x\to x_0}U(x)\neq\pm\infty$ يعني : $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$

$$l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\tan U(x)-Arc\tan\beta}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\tan U(x)-Arc\tan\beta}{U(x)-\beta}\cdot\frac{U(x)-\beta}{x-x_0}$$

– إذا كان $\lim_{x\to x_0}U(x)=\pm\infty$ يعني : $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$ نستعمل الصيغة :

$$Arc\tan(\frac{1}{U(x)})+Arc\tan U(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2},\lim U(x)=-\infty\\ \frac{\pi}{2},\lim U(x)=+\infty\end{cases}$$

ونصبح في الحالة السابقة.

تمرين:

*) $\boxed{\lim_{x\to 1^-}\frac{2xArc\sin x-\pi}{x-1}}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2xArc\sin x-\pi}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2xArc\sin x-\pi x+\pi x-\pi}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}2x(\frac{Arc\sin x-\frac{\pi}{2}}{x-1})+\pi\frac{x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}2x.\frac{Arc\sin x-\frac{\pi}{2}}{x-1}+\pi=+\infty$$

III– الدوال الأصلية :

1) تعريف :

لتكن f دالة معرفة على المجال I.
نقول إن الدالة F دالة أصلية لـ f على المجال I، إذا و فقط كانت F قابلة للاشتقاق على I
و $F'(x)=f(x)\quad(\forall x\in I)$

مثال :

نعتبر الدالة : $f(x)=x^3+\frac{1}{x^2+1}+\sin x$

الدالة : $F(x)=\frac{1}{4}x^4+Arc\tan x-\cos x$ دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

وكل دالة على شكل : $F(x)=\frac{1}{4}x^4+Arc\tan x-\cos x+\lambda$ هي كذلك دالة أصلية لـ f عل $\mathbb{R}$.

2) خاصيات:

1– لتكن f دالة تقبل دالة أصلية F على مجال I.

*) نعتبر الدالة : $G=F+\lambda$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

لدينا: $G'=(F+\lambda)'$
$$=F'(x)=f(x)$$

إذن G دالة أصلية ل f .

*) لتكن G دالة أصلية ل f .

لدينا : $(G-F)'=G'-F'$

$= f-f=0$

إذن يوجد λ بحيث: $G(x)-F(x)=\lambda$

يعني : $G(x)=F(x)+\lambda$

خاصية 1:

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية F على مجال I فإن الدوال الأصلية ل f هي الدوال التي تكتب على شكل $G=F+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

مثال:

حدد الدوال الأصلية للدوال: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

لدينا : $f(x)=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\dfrac{1}{x^2+1}$

إذن الدوال أصلية لــ f هي الدوال : $G(x)=x+Arc\tan x+\lambda$

2- لتكن f دالة تقبل دالة أصلية F على I.

ليكن $x_0\in I$ و $y_0\in\mathbb{R}$

– لنبحث عن الدوال أصلية G التي تحقق $G(x_0)=y_0$ لدينا : $G(x)=F(x)+\lambda$

ولدينا : $G(x_0)=y_0$ يعني : $F(x_0)+\lambda=y_0$

يعني : $\lambda=y_0-F(x_0)$

إذن $G(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$

ومنه توجد دالة أصلية وحيدة تحقق $G(x_0)=+y_0$

خاصية 2:

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية على مجال I و $x_0\in I$ و $y_0\in\mathbb{R}$ ، فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G تحقق $G(x_0)=+y_0$.

مثال:

نعتبر الدالة: $f(x)=x\sqrt[3]{x+1}$

حد الدالة الأصلية F ل f على $]-1,+\infty[$ بحيث $F(0)=1$

لدينا :

$$\begin{aligned}f(x)&=x\sqrt[3]{x+1}=x(x+1)^{\frac{1}{3}}\\&=(x+1-1)(x+1)^{\frac{1}{3}}\\&=(x+1)(x+1)^{\frac{1}{3}}-(x+1)^{\frac{1}{3}}\\&=(x+1)^{\frac{4}{3}}-(x+1)^{\frac{1}{3}}\\&=(x+1)'(x+1)^{\frac{4}{3}}-(x+1)'(x+1)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{\frac{4}{3}+1}(x+1)^{\frac{4}{3}+1}-\frac{1}{\frac{1}{3}+1}(x+1)^{\frac{1}{3}}+1+\lambda\\&=\frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\lambda\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\lambda$$

ولدينا : $F(0)=1$

يعني : $\frac{3}{7}-\frac{3}{4}+\lambda=1$

يعني : $\lambda=\frac{4}{7}+\frac{3}{4}=\frac{37}{28}$

وبالتالي : $F(x)=\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{37}{28}$

خاصية 3 :

لتكن F و G دالتان أصليتان لـ f و g على التوالي على I.
* الدالة $F+G$ هي دالة أصلية لـ $f+g$.
* الدالة αF دالة أصلية لـ αf.

خاصية 4 : (مقبولة)

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن الدالة f تقبل دالة أصلية.

3) جدول الدوال الأصلية الاعتيادية:

الدالة f	الدوال الأصلية F
$a\in\mathbb{R}$	$ax+\lambda$
$x^r \quad (r\in\mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+\lambda$
$f'f^r \quad (r\in\mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}f^{r+1}+\lambda$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+\lambda$
$\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$	$2\sqrt{U(x)}+\lambda$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+\lambda$
$\frac{f'}{f}$	$-\frac{1}{f}+\lambda$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arc\tan(x)+\lambda$
$\frac{U'(x)}{1+U^2(x)}$	$Arc\tan(U(x))+\lambda$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arc\sin x+\lambda$
$\frac{U'(x)}{\sqrt{1-U^2(x)}}$	$Arc\sin U(x)+\lambda$
$\cos x$	$\sin x+\lambda$
$U'(x)\cos U(x)$	$\sin U(x)+\lambda$
$\sin x$	$-\cos x+\lambda$
$U'(x)\sin U(x)$	$-\cos U(x)+\lambda$

$1+\tan^2 x$	$\tan x+\lambda$
$U'(x)(1+\tan^2 U(x))$	$\tan U(x)+\lambda$
$f'g+fg'$	$fg+\lambda$
$\frac{f'g+fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}+\lambda$

مثال:

حدد الدوال الأصلية لـــ : $f(x)=\cos x-x\sin x$

$=(x)'\cos x+x(\cos x)'$

إذن الدوال الأصلية ل f هي : $F(x)=x\cos x+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

IV– مبرهنة رول – ROLL – مبرهنة التزايدات المنتهية.

1) مبرهنة رول:

إذا كانت f دالة تحقق ما يلي:

*) f متصلة على $[a,b]$

*) f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$

*) $f(a)=f(b)$

فإنه يوجد $c\in\,]a,b[$

برهان:

+) إذا كانت f ثابتة على $[a,b]$ فإن $f'(x)=0$ $(\forall x\in\,]a,b[)$

إذن يوجد c من $]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

+) إذا كانت f غير ثابتة.

فإنه يوجد x_0 من $]a,b[$ بحيث $f(x_0)\neq f(a)$ و $f(x_0)\neq f(b)$

– إذا كان : $f(x_0)>f(a)$:

لدينا f متصلة على $[a,b]$ إذن f تقبل قيمة قصوية M عند c من $[a,b]$.

و لدينا : $f(c)=M>f(x_0)>f(a)$ إذن $f(c)\neq f(a)$ و $f(c)\neq f(b)$

إذن $c\neq a$ و $c\neq b$

ومنه $c\in\,]a,b[$

لدينا f قابلة للاشتقاق في c و تقبل قيمة قصوية عند c إذن $f'(c)=0$.

ومنه يوجد $c\in\,]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

– إذا كان $f(x_0)<f(a)$ نفس الطريقة باستعمال القيمة الدنوية.

ملاحظة:

*) العدد c ليس وحيدا.

*) مبرهنة رول يعني هندسيا أنه توجد نقطة أفصولها c حيث يكون المماس موازيا لمحور الأفاصيل.

2) مبرهنة التزايدات المنتهية:

مبرهنة:

إذا كانت f دالة تحقق ما يالي:

*) f متصلة على $[a,b]$

*) f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$

فإنه يوجد $c\in\,]a,b[$ بحيث $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

يعني : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

برهان :

نعتبر الدالة : $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

*) لدينا φ متصلة على $[a,b]$

*) φ قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و $(\forall x\in]a,b[)\quad \varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

*) لدينا $\varphi(b)=\varphi(a)=f(a)$

إذن حسب رول يوجد $c\in]a,b[$ بحيث : $\varphi'(c)=0$

يعني : $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

يعني : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ملاحظة :

*) العدد c ليس وحيدا.

*) نعتبر النقطتين $A(a,f(a))$ ، $B(b,f(b))$

لدينا $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هو المعامل الموجه للمستقيم (AB).

و لدينا $f'(c)$ هو المعامل الموجه للمماس في $M(c,f(c))$

إذن مبرهنة التزايدات المنتهية تعني هندسيا أنه توجد نقطة أفصولها c حيث يكون المماس موازيا (AB).

– مبرهنة رول هي حالة خاصة لمبرهنة التزايدات المنتهية.

تمرين

بين ما يالي:

*) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|\quad (\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$

*) $\dfrac{x}{x^2+1}\le Arc\tan x\le x\quad(\forall x\in\mathbb{R}^+)$

*) $x\le\arcsin x\le\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(\forall x\in[0,1[)$

*) ليكن x و y من $\mathbb{R}$. لنبين أن $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

نعتدر الدالة $f(t)=\sin t$

– لدينا f متصلة على المجال الذي محاذاته x و y.

– قابلة للاشتقاق على هذا المجال مفتوح.

وحسب مبرهنة المتزايدات المنتهية يوجد c محصور بين x و y بحيث: $f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$

يعني: $\sin x-\sin y=(x-y)\cos c$

يعني : $|\sin x-\sin y|=(x-y)|\cos c|$

و لدينا: $|\cos c|\le 1$ إذن : $|x-y||\cos c|\le|x-y|$

يعني : $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

*) ليكن $x\in\mathbb{R}^+$ لنبين أن $\dfrac{1}{1+x^2}\le Arc\tan x\le x$

نعتبر الدالة $f(t)=Arc\tan t$

– لدينا f متصلة على $[0,x]$.

– f قابلة للاشتقاق على $]0,x[$ و $f'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد $c\in]0,x[$ بحيث $f(x)-f(o)=(x-0)f'(c)$

يعني : $Arc\tan x = x.\dfrac{1}{1+c^2}$

و لدينا : $0 < c < x$

يعني : $0 < c^2 < x^2$

يعني : $1 < 1+c^2 < 1+x^2$

يعني : $\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < 1$

إذن : $\dfrac{x}{1+x^2} \le \dfrac{x}{1+c^2} \le x$

يعني : $\dfrac{x}{1+x^2} \le \mathrm{A}\mathrm{rctan}\, x \le x$

إذن : $\dfrac{x}{1+x^2} \le \mathrm{A}\mathrm{rctan}\, x \le x \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$

3) تطبيقات :

خاصية1:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $f'(x)=0 \quad (\forall x \in I)$ فإن f ثابتة على I.

برهان :

ليكن x_1 و x من I بحيث $x_2 \neq x_1$

نفترض مثلا $x_1 < x_2$

- لدينا f متصلة على $[x_1, x_2]$ (لأن $[x_1, x_2] \subset I$)
- لدينا f قابلة للاشتقاق على $]x_1, x_2[$ ($]x_1, x_2[\subset I$)

إذن حسب TAF يوجد $c \in]x_1, x_2[$ بحيث $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(c)$

و لدينا $f'(c) = 0$ إذن $f(x_1) - f(x_2) = 0$

يعني $f(x_1) = f(x_2)$

ومنه f ثابتة على I.

ملاحظة :

1) هذه الخاصة غير صحيحة إذا كان I ليس مجالا.

2) إذا كانت f , g دالتية قابلتين للاشتقاق على مجال بحيث $f'(x) = g'(x) \quad (\forall x \in I)$.

فإنه يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث : $f(x) = g(x) + \lambda \quad (\forall x \in I)$

تمرين تطبيقي:

بين أن : $\dfrac{\pi}{2} - 2Arc\tan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = Arc\sin x \quad (\forall x \in]-1,1[)$

- نضع $f(x) = Arc\sin x - \dfrac{\pi}{2} + 2Arc\tan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

لنبين أن $f(x) = 0$

لدينا : f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$.

و $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)'}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\frac{(\frac{1-x}{1+x})'(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}})}{\frac{2}{1+x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2}{(1+x)^2(2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})}(1+x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1+x)(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2\frac{(1-x)}{1+x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

إذن : $f'(x) = 0 \qquad (\forall x \in \left]-1,1\right[)$

يعني f ثابتة.

ولدينا : $f(0) = 0 - \frac{\pi}{2} + 2.\frac{\pi}{4} = 0$

إذن $f(x) = 0 \quad (\forall x \in \left]-1,1\right[)$

يعني : $Arc\sin x = \frac{\pi}{2} - 2Arc\tan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (\forall x \in \left]-1,1\right[)$

خاصية 2:

إذا كانت f , g دالتان تحققان مايالي:

* f , g متصلتان على $\left[a,+\infty\right[$
* f , g قابلتان للاشتقاق على $\left]a,+\infty\right[$ و $f'(x) \geq g'(x) \quad (\forall x \in \left]a,+\infty\right[)$
* $f(a) = g(a)$

فإن : $f(x) \geq g(x) \qquad (\forall x \in \left]a,+\infty\right[)$