أَهَمُّ مَا نَحْتَاجُهُ فِي دِرَاسَةِ الدَّوَالِ

أ. النهايات و الفروع اللانهائية

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب عمودي معادلته $x = a$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب أفقي معادلته $y = b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

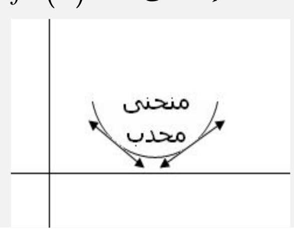
$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0 \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب مائل معلدلته $y = ax + b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

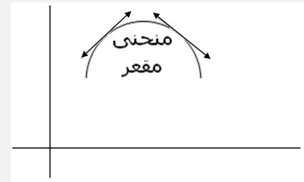
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$
  - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) - ax = b$ ← C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$
  - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = ax$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ← C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل

ب. تقعر منحنى و نقط الانعطاف

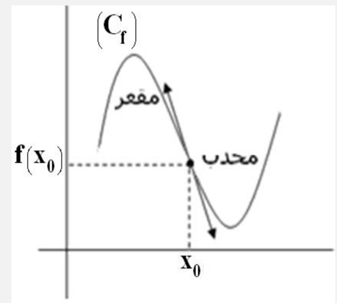
- إذا كان $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ فإن (C_f) محدب



- إذا كان $f''(x) \le 0 \quad \forall x \in I$ فإن (C_f) مقعر



- إذا كانت f'' تنعدم و تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a, f(a))$ هي نقطة انعطاف
- إذا كانت f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a, f(a))$ هي نقطة انعطاف



ج. مركز و محور تماثل (C_f)

- المستقيم ذي المعادلة $x = a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

- النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : & 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : & f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

د. اتصال دالة عددية

- f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
- f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$
- f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

ه. مبرهنة القيم الوسيطية

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال

$]a,b[$

- مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

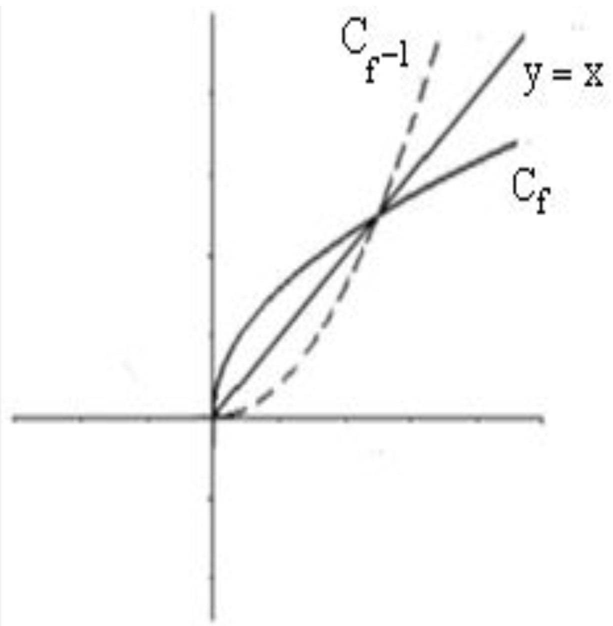
إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $0 \in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

و. اتصال مركب دالتين

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ متصلة على I.

ز. الدالة العكسية



خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن المعادلة $f(x)=y$ حيث $y \in f(I)$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

الدالة التي تربط كل عدد y بالحل تسمى الدالة العكسية للدالة f و نرمز لها ب : f^{-1}

نتائج:

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f(x)=x & ;x \in I \\ f \circ f^{-1}(x)=x & ;x \in J \end{cases} \quad (2)$$

خاصيات: لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتابة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول للمعلم)

ح. الإشتقاق

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l \in \mathbb{R}$ $l=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين		$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l \in \mathbb{R}$ $l=f_d'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته : $y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$

f قابلة للاشتقاق في a على اليسار	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f_g'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f_g'(a)$ و معادلته : $y = f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a		✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a) = f_g'(a) = f'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a).(x-a)+f(a)$

- إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a) \neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت $f'(a)=0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

الدالة f	**الدالة المشتقة** f'	**المجال** I
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$

$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$I =]0,+\infty[$ أو $I =]-\infty,0[$
$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$I =]0,+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$	$I =]0,+\infty[$ أو $I =]-\infty,0[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

الدالة	الدالة المشتقة
$\alpha.f$	$\alpha.f'$
$f+g$	$f'+g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\dfrac{1}{g}$	$-\dfrac{g'}{g^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
f^n	$nf'f^{n-1}$

- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$(\forall x > 0) \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- إذا كانت f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x \in I) \quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$$

- لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} و ليكن x_0 و y_0 عددان بحيث : $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت $f'(y_0) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)}$

- إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

رتابة دالة

- إذا كانت $f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in I$ فإن f تزايدية على I
- إذا كانت $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in I$ فإن f تناقصية على I
- إذا كانت $f'(x)>0 \quad \forall x\in I$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت $f'(x)<0 \quad \forall x\in I$ فإن f تناقصية قطعا على I

خاصية

- إذا كانت $f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعا على I

ط. دالة اللوغاريتم النبيري

1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز : $\ln$

2. استنتاجات و خاصيات :

- $D_{\ln}=]0,+\infty[\quad \left(\ln\left(\boxed{>0}\right)\right)$
- $\ln'(x)=\frac{1}{x} \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$ إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y \quad \forall x>0;\forall y>0$
- $\ln x>\ln y \Leftrightarrow x>y \quad \forall x>0;\forall y>0$
- $\ln x\leq\ln y \Leftrightarrow x\leq y \quad \forall x>0;\forall y>0$
- $\ln(1)=0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ نرمز له ب : e بحيث $e\simeq 2{,}718$ و يحقق : $\ln(e)=1$
- $\ln x=a\Leftrightarrow x=e^{a} \quad \forall a\in\mathbb{R} \quad \forall x>0$
- إشارة $\ln x$:
  - إذا كان : $0<x<1$ فإن $\ln x<0$
  - إذا كان : $x\geq 1$ فإن $\ln x\geq 0$

3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن x و y من $]0,+\infty[$ و $r\in\mathbb{Q}$ لدينا :

- $\ln(x.y)=\ln(x)+\ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^{+}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{n}}=0^{+}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0^{-}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x^{n}\ln x=0^{-}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

خاصية :

إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $\forall x\in I \quad U(x)\neq 0$

فإن الدالة $x\mapsto \ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و

لدينا : $(\ln|U(x)|)'=\frac{U'(x)}{U(x)} \quad \forall x\in I$

ملاحظة : إذا كانت U موجبة قطعا :

$$(\ln(U(x)))'=\frac{U'(x)}{U(x)}$$

نتيجة : مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{U'(x)}{U(x)}$

■ $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$

■ $\ln(x^r)=r\ln(x)$

هي الدوال : $x\mapsto \ln|U(x)|+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

ي. الدالة الأسية

أ. <u>تعريف:</u>
الدالة العكسية للدالة ln تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : exp

ملاحظة: $\forall x\in\mathbb{R}\quad \exp(x)=e^x$

<u>نتائج :</u>

$$\begin{cases} x=\ln(y) \\ (y>0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x=y \\ (x\in\mathbb{R})\end{cases}$$

$$\exp:\mathbb{R}\mapsto]0,+\infty[$$
$$x\mapsto \exp(x)$$

$D_{\exp}=\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R}:\ e^x>0$

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$

$e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$

$e^x\ge e^y \Leftrightarrow x\ge y$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ln(e^x)=x$

$\forall x>0: e^{\ln x}=x$

❖ $e^0=1$ و $e^1=e$

ج. <u>العمليات :</u>
ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

1) $e^x\times e^y=e^{x+y}$

2) $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$

3) $\frac{1}{e^x}=e^{-x}$

4) $(e^x)^r=e^{rx} \quad (r\in\mathbb{Q})$

$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=\begin{cases}0^+ & n\ \text{زوجي}\\ 0^- & n\ \text{فردي}\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

1) الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :
$(\forall x\in\mathbb{R})\quad (e^x)'=e^x$

2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x\mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$(\forall x\in I)\quad (e^{U(x)})'=U'(x)e^{U(x)}$

3) $(\forall x\in I)\quad (e^{rx})'=re^{rx}$

4)

الدالة	الأصلية
e^x	e^x
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx}$
$U'(x)e^{U(x)}$	$e^{U(x)}$

ك. الدوال الأصلية

f دالة معرفة على المجال I بما يلي : $f(x)=.......$	الدوال الأصلية ل f على I معرفة بما يلي: $F(x)=......$	المجال I
k (k عدد حقيقي ثابت)	$kx+c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n\neq -1; n\in\mathbb{Z}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
x^r $(r\in\mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$]0,+\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,(k\in\mathbb{Z})$
$(a\neq 0),\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$(a\neq 0),\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$

الدالة f	الدوال الأصلية ل f على I	شروط على u
$u'u^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$u'u^n$ $(n\neq -1; n\in\mathbb{Z}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	لكل x من I , $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$u'u^r$ $(r\in\mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+c$	لكل x من I , $u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+c$	لكل x من I , $u(x)\neq 0$
$u'e^u$	e^u+c	لكل x من I

ل. حساب التكامل

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية لها على $[a,b]$.

تكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

2. ملاحظات :

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

3. خاصيات :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. خطانية التكامل :

خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$.لدينا :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$.لدينا :

- إذا كانت $f \geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f \leq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f \leq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $[a,b]$

يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

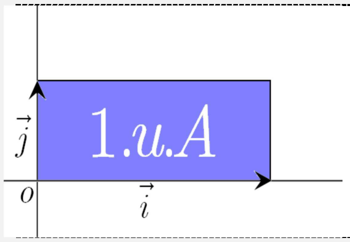
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

I. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$1u.A=\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|$



خاصية 1: لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

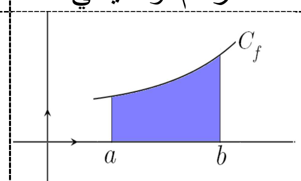
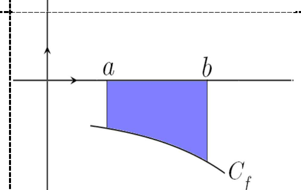
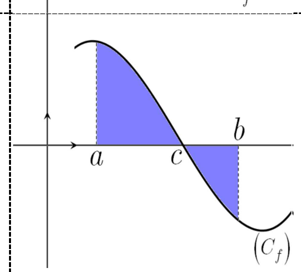
مساحة الحيز المحصور بين $\left(C_f\right)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

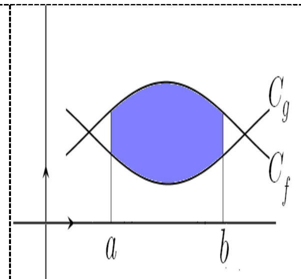
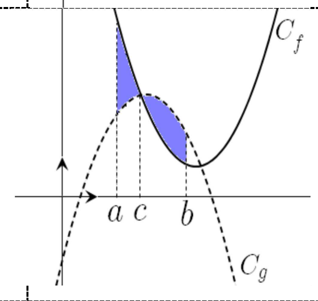
$$\left(\int_a^b\left|f(x)\right|dx\right)u.A$$

خاصية 2: لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx\right)u.A$$

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز الملون في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ و • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$

	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$
	• (C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ و • (C_f) يوجد تحت (C_g) على المجال $[c,b]$	$(f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\big)u.A$

.I حساب الحجوم :

خاصية 1:

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$

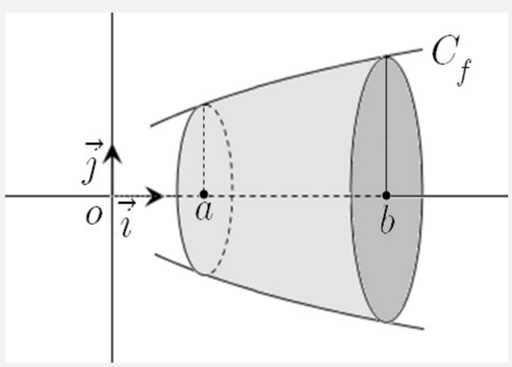
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\le t\le b$

إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم

خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :

$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]u.v$ حيث : $u.v$: وحدة الحجوم



つづく