الاشتقاق و دراسة الدوال

تمرين1

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} & x\in[0;2]-\{1\} \\ f(1)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

بين أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق في 1

الحل

لنبين أن : f قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}-\frac{1}{4}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4\sqrt{3+x}-(x+7)}{4(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)^2}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{3+x}-(x+7)\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{1}{64}}$$

تمرين2

$f(x)=\left|x^2+2x-15\right|$ حدد $f_g'(3)$ ؛ $f_d'(3)$ ثم معادلة نصف المماس ل (C_f) على يسار و على يمين النقطة ذات الأفصول 3

الحل

$f_g'(3)=-6$ $\quad$ $f_d'(3)=6$

تمرين3

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{25x^2-24}-x}{x-1} & x\in\left[\dfrac{2}{5}\sqrt{6};+\infty\right[-\{1\} \\ f(1)=24 \end{cases}$$

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في 1

ج- احسب $f'(x)$

الحل

لنبين أن : f قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt{25x^2-24}-x}{x-1}-24}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{25x^2-24}-(25x-24)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{25x^2-24-(25x-24)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt{25x-24}+(25x-24)\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-600\left(x^2-2x+1\right)}{(x-1)^2\left(\sqrt{25x-24}+(25x-24)\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-600}{\left(\sqrt{25x-24}+(25x-24)\right)}$$

$$=-\frac{600}{2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-300$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في 1 و $\boxed{f'(1)=-300}$

حساب : $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{25x^2-24}-x}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{\left(\sqrt{25x^2-24}-x\right)'(x-1)-\left(\sqrt{25x^2-24}-x\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{25x}{\sqrt{25x^2-24}}-1\right)(x-1)-\left(\sqrt{25x^2-24}-x\right)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\left(25x-\sqrt{25x^2-24}\right)(x-1)-\sqrt{25x^2-24}\left(\sqrt{25x^2-24}-x\right)}{(x-1)^2\sqrt{25x^2-24}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{25x^2-24}-25x+24}{(x-1)^2\sqrt{25x^2-24}}}$$

تمرين4

f قابلة للاشتقاق في a

احسب : $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$

الحل

نضع : $\displaystyle\alpha=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$

$$\alpha=\lim_{h\to0}h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}h\lim_{t\to0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}=-f'(a)$$

تمرين5

احسب $f'(x)$ في كل حالة :

أ- $f(x)=\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x^3}}$ ب- $f(x)=\arctan(7x^3-5x)$

ج- $f(x)=\frac{\sqrt[4]{3x^2+7}}{\sqrt[3]{x^2}}$ د- $f(x)=\arctan\sqrt[4]{3x^2+7}$

تمرين6

أ- $\lim_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$

(C_f) يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 3

ب- $\lim_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

ج- $\lim_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأعلى

د- $\lim_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

تمرين7

$f(x)=2x+\sqrt{3x-6}$

حدد $I=D_f$

1- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

2- استنتج أن المعادلة : $f(x)=6$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

الحل

1- $f(x)=2x+\sqrt{3x-6}$

حدد $I=D_f=[2,+\infty[$

f متصلة على $[2,+\infty[$ قابلة للإشتقاق على $]2,+\infty[$

$$f'(x)=2+\frac{3}{2\sqrt{3x-6}}$$

بما أن : $\forall x\in]2,+\infty[\quad f'(x)>0$

فإن : f تزايدية

إذن : $f([2,+\infty[)=[4,+\infty[$

f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

$\Leftrightarrow 2y+\sqrt{3y-6}=x$

$\Leftrightarrow 4y^2-y(4x+3)+x^2+6=0$

$4y^2-y(4x+3)+x^2+6=0$

$\Delta=24x-87$

$$y_1=\frac{4x+3-\sqrt{24x-87}}{8}$$

أو $$y_2=\frac{4x+3+\sqrt{24x-87}}{8}$$

نعتبر : x=4 نجد $y_1=2$ و $y_2\#2$

بما أن : $f(2)=4$ فإن : $f^{-1}(x)=y_1$

إذن : $$f^{-1}(x)=\frac{4x+3-\sqrt{24x-87}}{8}$$

2- بما أن f متصلة و رتيبة قطعا و

$f([2,+\infty[)=[4,+\infty[$

و $6\in[4,+\infty[$

فإن : المعادلة : $f(x)=6$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

تمرين8

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

حدد $I=D_f$

أ- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

الحل

أ - $I=D_f=]-1,+\infty[$

f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

(1)

$$f'(x)=\frac{x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}\qquad \forall x\in]-1,+\infty[$$

بما أن : $f'(x)>0\quad \forall x\in]-1,+\infty[$

فإن : f تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$ (2)

إذن : $f(]-1,+\infty[)=]\lim_{x\to-1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)[$

و منه : $f(]-1,+\infty[)=\mathbb{R}$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in]-1,+\infty[$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y+1}} = x \; ; \; xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2\left(y+1\right) \; ; \; xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - x^2 y - x^2 = 0 \; ; \; xy \geq 0$$

$$\Delta = x^4 + 4x^2$$

$y_2 = \frac{x^2 + \sqrt{x^4+4x^2}}{2}$ أو $y_1 = \frac{x^2 - \sqrt{x^4+4x^2}}{2}$

بما أن : $xy \geq 0$ و $y_2 \geq 0$

فإن : $f^{-1}(x) = y_1$

إذن : $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x^4+4x^2}}{2}$: $\forall x \in \left[9;+\infty\right[$

و منه :
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-1,+\infty\right[$$
$$x \to \frac{x^2 - \sqrt{x^4+4x^2}}{2}$$

تمرين9

$f(x) = \sqrt[3]{x + \frac{1}{x}}$ $\quad x \in [1;+\infty[$

حدد $I = D_f$

أ- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

الحل

أ - $I = D_f = [1;+\infty[$

f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $[1;+\infty[$ $\quad (1)$

$$\forall x \in \left[1;+\infty\right[\quad f'(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^2 \sqrt[3]{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}}$$

بما أن : $\forall x \in \left[1;+\infty\right[\; f'(x) > 0$

فإن : f تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$ $\quad (2)$

إذن : $f\left([1;+\infty[\right) = \left[f(1); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$

و منه : $f\left([1;+\infty[\right) = \left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

ليكن $x \in \left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$ و $y \in \left[1;+\infty\right[$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y + \frac{1}{y}} = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = yx^3$$

$$\Leftrightarrow y^2 - yx^3 + 1 = 0$$

$$\Delta = x^6 - 4$$

$y_2 = \frac{x^3 + \sqrt{x^6-4}}{2}$ أو $y_1 = \frac{x^3 - \sqrt{x^6-4}}{2}$

بالنسبة ل $x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ نجد : $y_2 = 2$ و $y_1 \neq 2$

بما أن : $f(2) = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ فإن : $f^{-1}(x) = y_2$

إذن : $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x^6-4}}{2}$: $\forall x \in \left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$

و منه :
$$f^{-1} : \left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[\to \left[1;+\infty\right[$$
$$x \to \frac{x^3 + \sqrt{x^6-4}}{2}$$

تمرين10

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x}$$

حدد $I = D_f$

أ- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

الحل

أ - $I = D_f = [0;+\infty[$

f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ $\quad (1)$

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\,(1+x)}$$

بما أن : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\; f'(x) > 0$

فإن : f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$ $\quad (2)$

إذن : $f\left([0;+\infty[\right) = \left[f(0); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$

و منه : $f\left([0;+\infty[\right) = \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

ليكن $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ و $y \in \left[0;+\infty\right[$

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}arctan\sqrt{y}=x$$
$$\Leftrightarrow arctan\sqrt{y}=2x-\frac{\pi}{2} \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow \tan\left(arctan\sqrt{y}\right)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) (2)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) (3)$$
$$\Leftrightarrow y=\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) (4)$$

لأن : $(2)\Rightarrow(1)$: $\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

لأن : $(4)\Rightarrow(3)$: $\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\geq 0$

إذن : $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\quad : \quad f^{-1}(x)=\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

و منه :
$$f^{-1}: \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\to [0;+\infty[$$
$$x \to \tan^2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

تمرين11

بين أن : $\sqrt{a^3+a^2b}+\sqrt{b^3+b^2a}=\sqrt{(a+b)^3}$

- استنتج تبسيطا ل :

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y^4}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}$$

الحل

نضع : $\alpha=\left(\sqrt{a^3+a^2b}+\sqrt{b^3+b^2a}\right)^2$

$$\alpha=a^3+a^2b+b^3+b^2a+2\sqrt{\left(a^3+a^2b\right)\left(b^3+b^2a\right)}$$
$$=a^3+a^2b+b^3+b^2a+2\sqrt{2a^3b^3+a^2b^4+a^4b^2}$$
$$=a^3+a^2b+b^3+b^2a+2\sqrt{a^2b^2(a+b)^2}$$
$$=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$$

إذن : $\sqrt{a^3+a^2b}+\sqrt{b^3+b^2a}=\sqrt{(a+b)^3}$

نعتبر : $a=\sqrt[3]{x^2} \;\; ; \;\; b=\sqrt[3]{y^2}$

تمرين12

احسب

-1
$$\lim_{x\to216}\frac{\sqrt[3]{x}-6}{x-216}=\lim_{x\to216}\frac{x-216}{(x-216)\left(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9\right)}$$
$$=\lim_{x\to216}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}^2+6\sqrt[3]{x}+36\right)}$$
$$\boxed{\lim_{x\to216}\frac{\sqrt[3]{x}-6}{x-216}=\frac{1}{108}}$$

أو العدد المشتق : نعتبر : $g(x)=\sqrt[3]{x}-6$ ؛ $g(6)=0$

$g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ؛ $g'(6)=\frac{1}{108}$

$$\boxed{\lim_{x\to216}\frac{\sqrt[3]{x}-6}{x-216}=g'(6)=\frac{1}{108}}$$

-2
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt[4]{x+1}^3+\sqrt[4]{x+1}^2+\sqrt[4]{x+1}+1\right)}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}=\frac{1}{4}$$

أو العدد المشتق : نعتبر : $g(x)=\sqrt[4]{x+1}-1$

-3 نعتبر : $\alpha=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x^3+2}$

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^3+x+1}^2+\sqrt[3]{x^3+x+1}\sqrt[3]{x^3+2}+\sqrt[3]{x^3+2}^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}^2\right)}$$
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x^3+2}=0}$$

-4
$$\lim_{x\to32}\frac{\sqrt[5]{x}-2}{\sqrt[5]{x+992}-4}$$

-5 نضع : $t=\sqrt[5]{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x+\sqrt[5]{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{\sqrt[5]{t^5+t^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{t\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{t^3}}\right)}$$
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x+\sqrt[5]{x^2}}}=1}$$

تمرين13

1- $\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[4]{2}$

$\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{1-x}\right)^4=2$

$4\sqrt[4]{(x+1)^3(1-x)}+6\sqrt[4]{(x+1)^2(1-x)^2}+4\sqrt[4]{(x+1)(1-x)^3}=0$

إذن: $(x+1)(1-x)=0$ و منه : $x=1$ أو $x=-1$

2- نضع : $y=\sqrt[3]{x}$

$\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3+125=0 \Leftrightarrow \frac{1-y}{3-y}=-5$

$\Leftrightarrow y=\frac{8}{3}$

إذن: $\boxed{x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}}$

1- نضع : $t=\sqrt[6]{x}$

$\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}=12 \Leftrightarrow t^2+t^3=12$

$\Leftrightarrow t^2-4+t^3-8=0$

$\Leftrightarrow (t-2)\left((t+2)+(t^2+2t+4)\right)=0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+6)=0$

$\Leftrightarrow t=2$

إذن: $\boxed{x=2^6=64}$

تمرين14

1- حساب : $\arctan 2+\arctan 3$

- نضع : $\alpha=\arctan 2 \;;\; \beta=\arctan 3$

$\tan(\alpha+\beta)=-1$

إذن : $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

لدينا: $0<\alpha<\frac{\pi}{2} \;;\; 0<\beta<\frac{\pi}{2}$

إذن : $0<\alpha+\beta<\pi$ و $0<-\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi$

و منه : $1<4k<5$ إذن : $k=1$

إذن : $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$

$\boxed{\arctan 2+\arctan 3=\frac{3\pi}{4}}$

2- حساب : $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$

- نضع :

$\alpha=\arctan\frac{1}{2} \;;\; \beta=\arctan\frac{1}{5};\; \gamma=\arctan\frac{1}{8}$

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$

إذن : $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

لدينا: $0<\frac{1}{2}<1 \Rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$

كذلك نجد: $0<\beta<\frac{\pi}{4} \;;\; 0<\gamma<\frac{\pi}{4}$

إذن : $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$ و $0<\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{3\pi}{4}$

و منه : $-1<4k<2$ إذن : $k=0$

إذن : $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$

$\boxed{\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}}$

3- لنبين أن : $2\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{3}{4}$

- نضع : $\beta=\arctan\frac{3}{4} \;;\; \alpha=\arctan\frac{1}{3}$

$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$ و $\tan\beta=\frac{3}{4}$

إذن : $\tan(2\alpha)=\tan\beta$

و منه : $2\alpha\alpha=\beta+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

لدينا: $0<\frac{1}{3}<1 \Rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$

كذلك نجد: $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

إذن : $-\frac{\pi}{4}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}<k\pi<\frac{\pi}{4}$

و منه : $-1<4k<1$ إذن : $k=0$

إذن : $2\alpha=\beta$

$\boxed{2\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{3}{4}}$

4- لنبين أن :

$\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad \arctan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}=\frac{\pi}{4}$

نعتبر : $f(x)=\arctan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}$

f متصلة على $\mathbb{R}^+$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

و : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*} \;;\; f'(x)=0$

إذن : f ثابتة على $\mathbb{R}^{+*}$

و بما أن : f متصلة على $\mathbb{R}^+$

فإن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \;;\; f(x)=f(0)=\frac{\pi}{4}$

إذن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+} \quad \arctan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}=\frac{\pi}{4}}$

5- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

نعتبر : $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$

f متصلة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

و : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad ; f'(x)=0$

إذن : f ثابتة على $\mathbb{R}^{+*}$

فإن : $\forall x \in \mathbb{R}^{+} \quad ; f(x)=f(1)=\frac{\pi}{2}$

إذن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}}$

أ- نعوض x ب $-x$ في 5 ونستعمل : arctan فردية

نجد : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{-*} \quad \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}}$

ب- $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right)=1}$$

تمرين15

-1 $(E)\ :\ \arctan x+\arctan 3x=\frac{\pi}{3}$

$x\le 0 \Rightarrow \arctan x+\arctan 3x\le 0$

بما أن : $\arctan x+\arctan 3x>0$ فإن : $x>0$

$(E)\Rightarrow \tan\left(\arctan x+\arctan 3x\right)=\tan\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{x+3x}{1-3x^2}=1 \ ; \ x>0$

$\Rightarrow 4x=1-3x^2 \ ; \ x>0$

$\Rightarrow 3x^2+4x-1=0 \ ; \ x>0$

$\Rightarrow 3x^2+4x-1=0 \ ; \ x>0$

$\Rightarrow x=\frac{-2-\sqrt{7}}{3} \ ; \ x=\frac{-2+\sqrt{7}}{3} \ ; \ x>0$

$\Rightarrow x=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$

$$\boxed{S=\left\{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right\}}$$

-2 $\arctan 2x+\arctan 3x=\frac{\pi}{4}$

بنفس الطريقة نجد : $\boxed{S=\left\{\frac{1}{6}\right\}}$

-3 $\arctan\left(x^2+x\right)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x^2+x=1$

$\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ ; \ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

تمرين16

احسب

-1 $\lim_{x\to+\infty} x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\arctan t}{t}=1$

2- العدد المشتق : نعتبر : $g(x)=\arctan\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$

$g'(x)=\frac{2}{4+x^2} \qquad g'(2)=\frac{1}{4}$

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{\arctan\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}}{x-2}=\frac{1}{4}}$$

تمرين 17

$$\begin{cases} f(x)=-1+\arctan\sqrt[3]{x+1} & x>-1 \\ f(x)=x-\sqrt[3]{-x^2(x+1)} & x\le -1 \end{cases}$$

(I -1 تحقق أن : $D_f=\mathbb{R}$

2- بين أن : f متصلة في -1

$\boxed{f(-1)=-1}$

3- احسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x) \ ; \ \lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-\sqrt[3]{-x^2(x+1)}$

$=-\infty-\infty$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\arctan\sqrt[3]{x+1}\right)$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1+\frac{\pi}{2}}$

-4 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt[3]{-x^2(x+1)}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to-\infty} -x-\sqrt[3]{-x^2(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-x\sqrt[3]{-x^2(x+1)}+\sqrt[3]{-x^2(x+1)}^{\,2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}^{\,2}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x=\frac{1}{3}}$$

$\boxed{y=2x+\frac{1}{3}\ \text{مقارب ل}\ (C_f)\ \text{بجوار :}\ -\infty}$

5- ادرس قابلية اشتقاق f **في** -1 **ثم أول النتيجة هندسيا**

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\arctan\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{\arctan\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\times\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$$

نضع : $t=\sqrt[3]{x+1}$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan t}{t}\times\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty}$$

f **غير قابلة للإشتقاق يمين** -1

و (C_f) **يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول**

-1 **موجه نحو الأعلى.**

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-\sqrt[3]{-x^2(x+1)}+1}{x+1}$$

$$=1+\lim_{x\to-1^-}\sqrt[3]{x^2}\ \lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt[3]{-(x+1)}}{-(x+1)}$$

$$=1+\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\qquad\left(t=\sqrt[3]{-(x+1)}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty}$$

f **غير قابلة للإشتقاق يسار** -1

و (C_f) **يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول**

-1 **موجه نحو الأسفل .**

6- تغيرات f **ثم إنشاء جدول تغيراتها**

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x+1}^{\,2}\left(1+\sqrt[3]{x+1}^{\,2}\right)} & x>-1\\[2ex] f'(x)=1+\dfrac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{-x^2(x+1)}^{\,2}} & x\le-1\end{cases}$$

$\uparrow\ \downarrow$

$\forall x\le-1\quad 3x^2+2x>0$

f تزايدية على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$-1+\frac{\pi}{2}$

7- حل المعادلة : $f(x)=0$

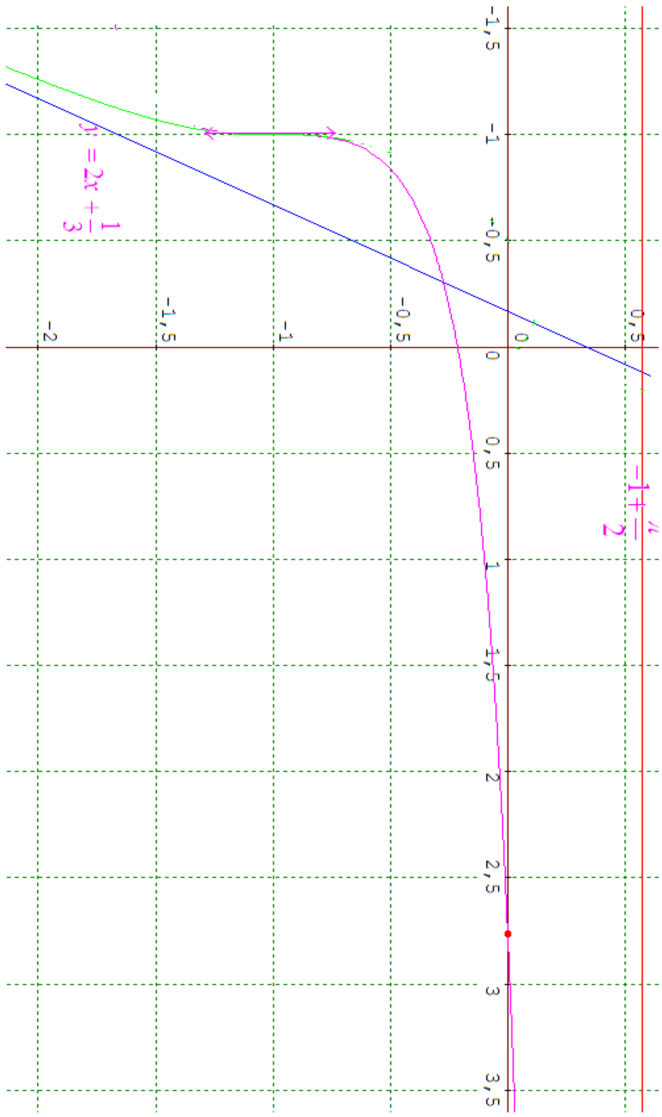
من خلال جدول تغيرات f

$$f(x)=0\Leftrightarrow -1+\arctan\sqrt[3]{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+1}=\tan 1$$

$$\boxed{f(x)=0\Leftrightarrow x=(\tan 1)^3-1}$$

8- إنشاء (C_f)



$(\tan 1)^3 - 1 \simeq 2.77$

II)- نعتبر : g قصور f على $]-\infty;-1]$

1 - $g(x) = x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)} \qquad x \leq -1$

f تزايدية قطعا على $]-\infty;-1]$

إذن : g تزايدية قطعا على $]-\infty;-1]$

$g(]-\infty;-1]) =]-\infty;-1]$

إذن : g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $J =]-\infty;-1]$ نحو $]-\infty;-1]$

2- بما أن : g تزايدية قطعا

فإن : g^{-1} تزايدية قطعا

$\forall x \leq -1 \quad g(x) - x = -\sqrt[3]{-x^2(x+1)}$

إذن : $\forall x \leq -1 \quad g(x) \leq x$

ومنه : $\forall x \leq -1 \quad g^{-1}(g(x)) \leq g^{-1}(x)$

إذن : $\forall x \leq -1 \quad g^{-1}(x) \geq x$

-3

$g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow g(x) = x \qquad (x \leq -1)$

$\Leftrightarrow x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)} = x \quad (x \leq -1)$

$\Leftrightarrow x = -1$

III)- نعتبر المتتالية : $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$ $u_0 \in]-\infty;-1[$ $(n \in \mathbb{N})$

1- لنبين أن : $u_n \in]-\infty;-1]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

بالترجع

لدينا : $u_0 \in]-\infty;-1[$

نفترض أن : $u_n \in]-\infty;-1]$

إذن : $g^{-1}(u_n) \in]-\infty;-1]$

بما أن : $g^{-1}(]-\infty;-1]) =]-\infty;-1]$ و $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$

فإن : $u_{n+1} \in]-\infty;-1]$

إذن : $u_n \in]-\infty;-1]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2- لنبين أن (u_n) تزايدية

لدينا : $u_n \in]-\infty;-1]$

إذن : $g^{-1}(u_n) \geq u_n$

و منه : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : (u_n) تزايدية

3- بما أن : (u_n) تزايدية مكبورة ب -1

فإن : (u_n) متقاربة

لدينا: $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$ $(n \in \mathbb{N})$

و g^{-1} متصلة على $]-\infty;-1]$

و $g^{-1}(]-\infty;-1]) =]-\infty;-1]$

و $u_n \in]-\infty;-1]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

و (u_n) متقاربة

فإن : $\lim u_n$ هو حل المعادلة : $g^{-1}(x) = x$

لدينا: $g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x = -1$

إذن : $\boxed{\lim u_n = -1}$

IV)- نعتبر المتتالية : $v_{n+1} = g(v_n)$ $v_0 \in]-\infty;-1[$ $(n \in \mathbb{N})$

1- لنبين أن : $v_n \in]-\infty;-1]$

بالترجع

لدينا : $v_0 \in]-\infty;-1[$

نفترض أن : $v_n \in]-\infty;-1]$

إذن : $g(v_n) \in]-\infty;-1]$

بما أن : $g(]-\infty;-1]) =]-\infty;-1]$ و $v_{n+1} = g(v_n)$

فإن : $v_{n+1} \in]-\infty;-1]$

إذن : $v_n \in]-\infty;-1]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2- لنبين أن (v_n) تناقصية

لدينا : $v_n \in]-\infty;-1]$

إذن : $g(v_n) \leq v_n$

و منه : $v_{n+1} \leq v_n$

إذن : (v_n) تناقصية

2- لنبين أن (v_n) غير مصغورة

نفترض أن : (v_n) مصغورة

إذن : (v_n) متقاربة

لدينا: $v_{n+1} = g(v_n) \quad (n \in \mathbb{N})$

و g متصلة على $]-\infty;-1]$

و $g(]-\infty;-1]) =]-\infty;-1]$

و $v_n \in]-\infty;-1] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و (v_n) متقاربة

فإن : $\lim v_n$ هو حل المعادلة : $g(x) = x$

لدينا: $g(x) = x \Leftrightarrow x = -1$

إذن : $\lim v_n = -1$

بما أن : (v_n) تناقصية

فإن : $v_n \leq v_0 < -1$

إذن : $\lim v_n \leq v_0 < -1$

و منه : $-1 \leq v_0 < -1$: تناقض

إذن : (v_n) غير مصغورة

3- بما أن : (v_n) تناقصية و غير مصغورة

فإن : $\boxed{\lim v_n = -\infty}$